Verſuch
eines
Abc Buchs der Kryſtallkunde

von

Karl von Raumer
Bergrath und Profeſſor zu Halle.

Erſter Theil.
Mit Kupfern.

Berlin,
bei G. Reimer.
1820.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Inhalt.

	Seite.
Vorrede.	VII
Einleitung.	XXI
I. Kryſtalle.	XXI
II. Stellung des Kryſtalls.	XXII
III. Flächen, Kanten, Ecken der Kryſtalle.	XXIV
IV. Kryſtallverwandlung.	XXVIII
V. Kryſtallmodelle.	XXXV

* * *

I. Das Würfelgeſchlecht.

§. 1. Die Sippe des Würfelgeſchlechts.	3
§. 2. Die Hauptkörper des Würfelgeſchlechts.	3
§. 3. Der Würfel.	4
§. 4. Das 8flach.	6
§. 5. Das Rauten 12flach.	9
§. 6. Der Leuzit.	10
§. 7. Das 4flach.	11

Verwandtſchaftsverhältniſſe des Würfelgeſchlechts.

A. Die eigentliche Würfelſippe.

		Seite.
§. 8.	1) Würfel und 8flach.	12
	A) Der umſchriebene Würfel. . . .	12
	B) Das umſchriebene 8flach. . . .	16
	C) Verhältniß eines dem 8flach umſchriebenen Würfels zu einem eingeſchriebenen, eines dem Würfel umſchriebenen 8flachs zu einem eingeſchriebenen. *)	17
§. 9.	2) Würfel und Rauten12flach.	19
§. 10.	3) 8flach uud Rauten12flach.	30
§. 11.	4) Rauten12flach und Leuzit.	37
§. 12.	5) Würfel und Leuzit.	48
§. 13.	6) 8flach und Leuzit.	55
§. 14.	Verhältniß von Würfel, 8flach und Rauten12flach, welche um und in denſelben Leuzit beſchrieben ſind, zu einander.	63

B. Die Nebenſippe des 4flachs.

§. 15.	1) 4flach und Würfel.	65
§. 16.	2) 4flach und 8flach.	71
§. 17.	3) 4flach und Rauten12flach.	74
§. 18.	4) 4flach und Leuzit.	84
§. 19.	Verhältniß der in und um ein 4flach beſchriebenen Hauptkörper zu einander.	92
§. 20.	Widerſpricht die Verwandſchaft des 4flachs mit der Würfelſippe dem Geſetze des Ebenmaaßes? . .	94

Zuſätze.

§. 21.	A. Das Pyramiden4flach.	95
§. 22.	B. Das Rauten12flach mit zugeſchärften 4kantigen Ecken.	97

---

*) Dieſelbe Eintheilung wiederholt ſich in den §§. 9—13, 15—16 25, 26, 28—32.

Seite.

§. 23. C. Das Rauten12flach, deſſen 4kantige Ecken mit 4 Flächen zugeſpitzt ſind, die Zuſpitzungsflächen auf die Kanten aufgeſetzt. 99
§. 24. D Reihe Leuzit ähnelnder Körper. 101
§. 25. E. Der Pyramidenwürfel. 103
§. 26. F. Das Pyramiden8flach. 106
§. 27. G. Das Pyramiden Rauten12flach oder 48flach. . . 108

C. Die Nebenſippe des Kies12flachs.

§. 28. Würfel und Kies12flach. 112
§. 29. 8flach und Kies12flach. 119
§. 30. Rauten12flach und Kies12flach. 125
§. 31. Leuzit und Kies12flach. 128
§. 32. 4flach und Kies12flach. 137
§. 33. Das Kies24flach. 140

Anhang.

§. 34. Das Geſchlecht des regelmäßigen 12flachs. . . . 143
§. 35. Ein Blick auf das Würfelgeſchlecht 158

II. Das Geſchlecht des Rautenflachs.

§. 36. Der Würfel. 169
§. 37. Verhältniß des Würfels zum Rautenflach. 169
§. 38. Der Würfel ſteht in der Mitte zwiſchen 2 einander entgegengeſetzten Reihen der Rautenflache. . . . 171
§. 39. Die Enden der Reihe ſpitzer Rautenflache. . . . 174
§. 40. Die Enden der Reihe ſtumpfer Rautenflache. . . 177
§. 40b. Vergleichung der 2 entgegengeſetzten Reihen der Rautenflache. 182
§. 41. Winkeltauſch. 184
§. 42. Die Polkante bildet einen größern Winkel mit der Axe, als die Polgere. 188

Seite.

§. 43. Theilung der Axe eines Rautenflachs. Anderweitige Größenbeſtimmungen. 189

Umgeſtaltungen des Rautenflachs.

§. 44 A. Abſtumpfungen und 3flächige Zuſpitzungen. . . 139

§. 45. Körper, welche aus den angegebenen Abſtumpfungen und 3flächigen Zuſpitzungen entſpringen. . 195

§. 46. Zur Ergänzung, Ausführung und Ueberſicht der beiden vorigen Abſchnitte. 219

§. 47. Zum Schluß. 222

* * *

Aufgaben. 225

Druckfehler.

S. 152 Z. 5 v. u. ſtatt: Ecken l. Ecke.

S. 169 Z. 12 v. u. hinter „Winkel“ füge hinzu: Eine waagrechte Gere mit 2 ſenkrechten Kanten.

S. 170 Z. 4 v. u. ſtatt: ſeiner Geren l. ſeiner Polgeren.

S. 171 Z. 6 v. o. ſtatt: Kantenaxen l. Polkantenaxen.

S. 174 Z. 6 v. o. ſtatt: nenneu l. nennen.

Ebendaſelbſt Z. 8 v. o. ſtatt ſtumpfen l. ſtumpfer.

Vorrede.

Ein Katechismus iſt kein Glaubens- und Sitten-Syſtem, ein Abc Buch keine philoſophiſche Sprachlehre. So enthält auch dieſes Abc Buch keine wiſſenſchaftliche umfaſſende Darſtellung und geſchichtliche Entwicklung der Kryſtallkunde. Nicht die Wiſſenſchaft an ſich und ihre Ausbildung iſt hier Zweck, ſondern das Lehren der Wiſſenſchaft. Ich ſuchte als Lehrer die rechten Anfänge für Anfänger, und von da aus natürliches ſicheres Fortſchreiten ohne Sprung und Ueberſpannung. Aus dem, was ich bei mehrjährigem Unterricht gefunden, ging ein früher gedruckter Aufſatz, über das Lehren der Minerkunde *), und großentheils auch gegenwärtiges Abc Buch hervor. — Ich will einiges kurz wiederholen, was jener Aufatz über das Lehren der Minerkunde im Allgemeinen enthält. Der Anfänger, ſagte ich, müſſe zuerſt Steine beſehn, wie ein Kind,

*) Er findet ſich in einem Bändchen, was ich unter dem Titel: „Vermiſchte Schriften" herausgegeben.

vom Lehrer durch keine Bemerkungen und Fragen geſtört, ſich ganz dem ſinnlichen Genuß hingeben. Farbe, Glanz, Durchſichtigkeit, Geſtalt, kurz alle ſinnlichen Eigenſchaften eines Steins machen auf ihn einen innig einigen Eindruck, deſſen einfacher entſprechender Ausdruck der (dem Anfänger mitzutheilende) Name des Steins iſt. — Hierauf, ſagte ich, ſolle der Lehrling zu Betrachtung von Minergattungen fortſchreiten, welche nach Maasgabe einzelner ſinnlicher Eigenſchaften, nach Farbe, Durchſichtigkeit, Geſtalt u. ſ. w. geordnet ſind. Aus dieſer (zweiten) Betrachtung entwickle ſich eine ſondernde, mehr beſonnen verſtändige Auffaſſung aller einzelnen ſinnlichen Eigenſchaften, deren innigſte Einheit eben den urſprünglich einigen Geſammteindruck erzeugte. —

Auch die regelmäßigen Geſtalten der Miner, oder die Kryſtalle ſollen nun vom Lehrling eigens betrachtet werden. Nicht genug, daß er ſie einzeln auffaſſe, er muß auch aus den gehörig geordneten Reihen die Umgeſtaltungen und Verwandtſchaften derſelben erſehen. Hat er dies an natürlichen Kryſtallen verſucht, ſo gebe man ihm Modelle derſelben Kryſtalle; in ihnen gewiſſermaaßen die Geſtalt der Miner für ſich, da er in den Modellen einzig die Geſtalt, gar nicht die Maſſe ins Auge

faßt. Er lege nun ſelbſt die Verwandſchaftsreihen. — Mit dieſer Betrachtung und Uebung verbinde er zugleich — als Probe des richtigen Auffaſſens — das Beſchreiben der Kryſtalle und ihrer Umgeſtaltungen. Dem klaren Eindruck entſpreche klarer Ausdruck. — Der Lehrling beginne mit Gattungen, deren Kryſtalle dem einfachen Geſchlechte des Würfels angehören, und ſchreite allmählig zu Gattungen von mehr und mehr verwickelter Kryſtalliſation fort *).

Erſt wenn er die Kryſtalle aller ausgezeichneten Gattungen, auch der ſchwierigern, auf die angegebene Weiſe angeſchaut, gereiht und beſchrieben hat, erſt dann ſuche ich aus dem ſinnlichen Betrachten, in welchem freilich ſchon ein ſtiller Keim des Verſtandes lebt und treibt, das beſonnen verſtändige Betrachten zu entwickeln. Ich leite ihn — möglichſt leiſe — zur Entdeckung des mathematiſchen Geſetzes, welches der ſinnlichen Anſchauung zunächſt liegt, deſſen heimliche Kraft ein verſtändiges Auge beim Anblick der ſchönen Geſtalten fühlt **).

*) Soweit iſt das Geſagte meiſt aus dem oben angeführten Aufſatze entnommen. Ich brauche nicht zu erinnern, daß dieſe Lehrweiſe nur mit Hülfe einer leidlich vollſtändigen Minerſammlung, wie ich in Breslau unter Händen hatte, befolgt werden konnte. Daß es keiner prächtigen, mit Seltenheiten ausgeſtatteten Sammlung bedürfe, habe ich in dem erwähnten Aufſatze aus einander geſetzt.

**) Es macht z. B. bei Betrachtung eines Würfels einen un-

Auf welche Weiſe, in welcher Folge ich nun die mathematiſchen Geſetze der Kryſtalle entwickle, habe ich in vorliegendem Abc Buche darzulegen geſucht.

Aus dem Geſammteindruck eines natürlichen Kryſtalls erzeugt ſich, wie wir ſahen, im Schüler zuerſt die ſondernde Betrachtung der einzelnen ſinnlichen Eigenſchaften — der Farben, des Glanzes, der regelmäßigen Geſtalt. Nun erwächſt wiederum aus dem Geſammteindruck der Geſtalt an ſich, ein ſonderndes Betrachten ihrer Flächen, Kanten, Ecken, Axen u. ſ. w. und der Wechſelverhältniſſe dieſer ihrer mathematiſchen Einzelheiten. Wird jenes Betrachten durchgeführt, ſo verwandelt ſich das urſprüngliche ſinnliche Wohlgefallen an der Schönheit eines Kriſtalls, in ein mehr geiſtiges, durch klare verſtändige Einſicht in die Zuſammenſtimmung und Einigung aller jener Einzelnheiten, zu Einer ſchönen Geſtalt.

Es wird aber nicht allein das mathematiſche Geſetz der einzelnen Kryſtalle, ſondern das ihrer

mittelbaren beſtimmten ſinnlichen Eindruck, daß ſeine Flächen- und Kantenwinkel rechte ſind, nicht aber, daß ſich die Quadrate der Kante, Diagonale und Axe verhalten wie 1 : 2 : 3. — Der Leſer vergleiche, was Harniſch in ſeinem Handbuche über das teutſche Volksſchulweſen (r eslau 1820) S. 232, über Raumlehre der Anſchauung und des Verſtandes, treffend mit großer Klarheit ſagt.

Umgeſtaltung und Verwandtſchaft erforſchet und begriffen.

Bei dieſen Betrachtungen fühlt der Schüler bald das Bedürfniß mancher Kenntniſſe aus der Raumlehre. Zunächſt bedarf er der Einſicht in das Weſen der gleichlaufenden Linien, mehrerer regelmäßigen und unregelmäßigen Figuren, insbeſondere der Dreiecke, ihrer Gleichheit und Aehnlichkeit, er muß ferner richtige Begriffe von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Körper haben u. ſ. w. Der Lehrer entwickle dies am rechten Orte, wenn es der Gegenſtand der Betrachtung fordert; und zur rechten Zeit, wenn ſich das Bedürfniß beim Lehrling regt und er reif iſt zum Verſtehen. Kenntniß der höhern Mathematik iſt beim Gebrauch dieſes Abc Buchs nicht nöthig. Ich ſagte, daß ich hier vornämlich die mathematiſchen Geſetze erforſche, welche der ſinnlichen Anſchauung ganz nahe liegen, die mit beſonnener Gewißheit ausſprechen, was das Auge fühlt. Wie ein Küſtenfahrer auf kleinem Boote das hohe Meer meidet, ſo meide ich das hohe Meer der höhern Mathematik, den Calcul, welcher das ſinnliche Bild ganz aus dem Auge verliert. Niemand lege dies ſo aus, als wäre ich mit thörichter Beſchränktheit gegen eine gründliche mathematiſche Ausbildung der Kryſtallkunde, deren ſie ſich beſonders unter uns durch

die vortrefflichen Kryſtallforſcher, Weiß und Mohs, erfreut.

Ich ſpreche hier nur vom Unterricht, ja nur von den erſten Anfängen deſſelben. — In dem Maaße, als der Lehrling ſich entwickelt, möge ſich ihm das urſprünglich ſinnliche Bild mehr und mehr vergeiſtigen und zu einem mathematiſchen Urbilde und Gedanken verklären. Aber anfangen muß er mit der klarſten, feſteſten, ſinnlichen Auffaſſung der Geſtalt. Fehlt ſolche Auffaſſung, ſo iſt des Schülers rein mathematiſche Entwicklung ein geiſtiges Luftſchloß ohne Grundlage.

Gewöhnlich beginnen Lehrvorträge und Lehrbücher mit Einleitungen, in welchen die allgemeinſten Begriffe, Anſichten und Ueberſichten gegeben werden. Man ſucht ſich voreilig zuvorkommend mit den Anfängern über Dinge zu verſtändigen, die ſie eben erſt verſtehn lernen ſollen, zu deren Verſtändniß ſie daher unreif ſind.

In Abc Büchern fehlen ſolche Einleitungen. Mit Kindern macht man ſo wenig Umſtände, als Handwerker mit neuen Lehrjungen. Ich liebe es auch nicht, einen Fremden vor der Gartenthür weitläuftig über den Garten zu unterhalten. Ich führe ihn lieber ohne weiteres hinein, und gehörig darin

herum. Hat er lebendige Augen, ſo wird er Bäume und Blumen nicht überſehn, und wo ſich eine ſchöne Ausſicht bietet, von ſelbſt ſtill ſtehn, höchſtens einer kleinen Erinnerung bedürfen. Sind wir zuſammen den ganzen Garten durchwandert, dann ſpreche ich gern mit ihm über die zweckmäßigen, ſinnigen, ſchönen Anlagen, weil er nicht mehr fremd iſt und mich verſteht. — So gern ich nun mein Abc Buch, gleich den andern, ohne alle Einleitung abgefaßt hätte, ſo fühlte ich doch, daß es nothwendig ſey, zum richtigen Verſtändniß und Gebrauch deſſelben beim Unterricht für *Lehrer* und *Selbſtlehrlinge* einiges Allgemeine in der Kürze vorauszuſchicken. Zum Schluß habe ich den Inhalt des ganzen Buchs in Aufgaben gefaßt. Ich wünſche daß Schüler und Selbſtlehrlinge mit Leſen und Löſen jener Aufgaben anfangen, und dann erſt meine Darſtellung vergleichen. Mit Hülfe von zweckmäßigen Modellen iſt dieſe Arbeit nicht ſchwer *). Hat der Lehrling alle Aufgaben ſelbſt gelöſt, ſo wird er Anſichten und Ueberblicke, welche ich am Schluſſe

*) Leider mangelt es aber noch ſehr an Modellen. Aus der Einleitung wird der Leſer erſehn, wie ich es mir angelegen ſeyn laſſe, daß dergleichen angefertigt werden, wo möglich gut und doch wohlfeil. Kommt in dieſer Hinſicht etwas zu Stande, ſo danke ich es vornemlich meinen jungen Freunden und Schülern, Sauermann in Breslau, Maßmann in Ber=

einzelner Betrachtungen und des ganzen Werks gebe, leicht faſſen, ja ſelbſt leicht finden. — Ich hatte beim Schreiben nicht blos den Unterricht in der Minerkunde vor Augen. Mehrere Lehrer der Mathematik haben geäußert: man irre hinſichtlich der Anfänge des mathematiſchen Unterrichts. Nicht von den Elementen müſſe man ausgehn, nicht vom Punkt zur Linie, von dieſer zur Fläche, von der Fläche zum Körper fortſchreiten. Vielmehr ſeyen die Körper das Gegebene, mit deren Betrachtung der Schüler anfangen und auflöſend (analytiſch) zu Flächen, Linien und Punkten gelangen müſſe. So ſolle er dieſe Elemente erſt ſelbſt finden, dann könne er mit ihnen zuſammenſetzend (ſynthetiſch) verfahren. — Jene Lehrer würden wahrſcheinlich beim Unterricht ihrer Anſicht ausdauernder folgen, kennten ſie nur den großen Reichthum an Körpern, welcher der Mathematik aus Erforſchung der Kryſtalle, zugefloſſen iſt. So beſchränken ſie ſich darauf, die 5 regelmäßigen Körper, dann Säule, Kugel, Kegel und Walze durchzunehmen. Die Verwandtſchaft der Körper iſt ihnen ſo gut als unbekannt. Mögte

lin, Bäntſch in Freiberg und Wackernagel in Giebichenſtein. Sie waren mir ſchon bei Ausarbeitung dieſes Werks durch mühſames und geſchicktes Verfertigen von hölzernen und Papp-Modellen ſehr behülflich.

ihnen mein Buch mit Zuziehung von Modellen Hülfe leiſten.

In ſprachlicher Hinſicht muß ich über meine Schrift dies ſagen. Unter meinen Schülern waren mehrere die nie griechiſch gelernt, denen daher griechiſche Namen und Ausdrücke ſehr zu ſchaffen machten. Das gab zu vielen Verwechſelungen Anlaß. Sie nannten das Oktaeder ein Tetraeder, das Dodekaeder ein Ikoſaeder u. ſ. w. Hierdurch ward ich zuerſt bewogen, teutſche Namen für griechiſche anzunehmen *). Ich gebe hier das kurze Verzeichniß dieſer teutſchen Wörter nebſt der beigefügten erklärenden Ueberſetzung in die herkömmlichen griechiſchen Wörter.

4flach	— —	Tetraeder.
8flach	— —	Oktaeder.
Rauten12flach	—	Rhomboidaldodekaeder oder Granatdodekaeder.
Kies12flach	—	Schwefelkiesdodekaeder oder Pentagondodekaeder.
Kies20flach	—	Schwefelkiesikoſaeder.

*) Nur Pyramide und Leuzit behielt ich vor der Hand bei. Spitzſäule für Pyramide iſt höchſt unbequem, beſonders wegen des öfteren Begegnens von Säule und Spitzſäule. Leuzit (abgekürzt ſtatt des Wernerſchen Ausdrucks: Leuzitkriſtalliſation)

wähl-

Kies30flach — Schwefelkiestriakontaeder.
48flach — — Tetrakontaoktaeder.
Rautenflach — Rhomboeder.
Gere — — Diagonale *).

Grundgeren einer Ecke nenne ich die Geren, welche Grundlinien von Dreiecken ſind, deren Spitzen in dieſe Ecken fallen.

Die meiſten dieſer teutſchen Wörter ſind kürzer und daher für Zuſammenſetzungen bequemer, als die entſprechenden griechiſchen Wörter. Großentheils im Leben oder in der Schule ſchon gebraucht, bedürfen ſie nicht m e i n e r beſondern Empfehlung zur Erhaltung des Bürgerrechts.

Denen aber, welche für die herkömmlichen griechiſchen und lateiniſchen Namen nur deshalb ſtimmen, weil ſie eben herkömmlich, gegen die neuen teut-

wählte ich wegen der Kürze und Bequemlichkeit für Zuſammenſetzungen. Gern will ich beide Worte für paſſende bequemere teutſche Worte fahren laſſen.

*) Des Wortes Gere bedienen ſich Tiſchler u. ſ. w. für Diagonale eines Quadrats. Ich habe es für alle und jede Diagonalen gebraucht. Keppler ſagte dafür „Zwerlini, Querlini, Durchzug“. Daher überzwerch für diagonal. Einige andere von mir gebrauchte neue Ausdrücke werden gehörigen Orts erklärt werden.

teutſchen, weil ſie nicht herkömmlich, gebe ich einmal zu bedenken, daß die Minerkunde mit den weniger herkömmlichen Namen „Tetraeder, Oktaeder“ bei weitem nicht ausreicht. Welche große Zahl den Alten unbekannte Geſtalten, haben wir nicht kennen gelernt, die zu benennen ſind. Iſt nun der Name neu zuſchaffen, ſo wird wohl jeder Teutſche, auch der an Tetraeder und Oktaeder Ge- und Verwöhnte, leichter einen neuen teutſchen Namen faſſen und verſtehen, als einen neuen griechiſchen. Welchem Teutſchen iſt nicht 120flach, 90flach, 48flach faßlicher, als Hekatonikoſaeder, Enneakontaeder, Tetrakontaoktaeder.

Zweitens will ich für die erwähnten Gegner der Sprachreinigung etwas aus einem alten Buche mittheilen. Es gab nämlich der große Keppler 1616 einen „Außzug auß der Vralten Meſſe Kunſt Archimedis“ heraus. Zum Schluſſe dieſes Werks findet ſich eine

„Erklärung der gebrauchten geometriſchen Wörter und Terminorum“.

Unter dieſen Wörtern ſind folgende:

„Seitte, latus plani. Lenge, longitudo. Breitte, latitudo. Höhe, altitudo. Tiefe, profundi-

tas. Fläche, plana ſuperficies. Kraiß, Circkel, circularis linea. Umbkraiß, circumſerentia. Bogen, arcus. Winkel, Spitz, angulus. Scharff, acutus. Stumpf, obtusus. Rautten, rhombus. Gleich, aequalis. Enlich, ſimilis. Raum, spatium. Gewicht, Schwäre, pondus. Würffel, cubus. Kugel, globus. sphaera. Kegel, conus.“

Ich denke meine Leſer werden kaum ihren Augen trauen, wenn ſie ſehn, welche teutſche Worte zu Kepplers Zeit für teutſche Leſer einer lateiniſchen „Erklärung“ bedurften.

Niemand wird wähnen es gehe aus dieſer Erklärung hervor, daß man zu Kepplers Zeit die Worte: Seite, Länge, Breite, Tiefe u. ſ. w in Teutſchland nicht für die entſprechenden Begriffe gebraucht habe. Jeder ungelehrte Teutſche verſtand ſie gewiß, und die Erklärung ſcheint mir nur für ſolche teutſche Gelehrte beſtimmt, welche ſelbſt ſo ganz ins Lateiniſche überſetzt waren, daß Keppler für ſie teutſche Worte ins Lateiniſche überſetzen mußte, damit ſie ihn verſtänden. Ich führe das Beiſpiel an, um zu zeigen, wie ſehr die Herrſchaft der teutſchen Sprache in der Wiſſenſchaft ſeit Kepplers Zeit zugenommen. Wir dürfen hof-

ſen, dieſe Herrſchaft werde immer mächtiger werden.

Sind beim Bilden der in dieſes Buch aufgenommenen neuen teutſchen Wörter, nicht ſprachwidrige Misgriffe geſchehn, — worüber ich mir durchaus kein Urtheil anmaaße — ſo werden jene Wörter hoffentlich, wie die von Keppler gebrauchten, auch mit der Zeit in der Wiſſenſchaft herkömmlich werden.

Die wenigen Schriften über die Kriſtallkunde von Romé de l'Isle, Hauy, Brochant u. ſ. w., ſind zu bekannt, als daß es nöthig wäre, eigens aufzuführen, was ich ihnen ſchuldig bin, noch weniger brauche ich zu erwähnen, was ich Wernern verdanke.

Ich habe dies Buch einen „Verſuch" genannt, weil ich nur zu gut weiß, wie viel ihm zur Vollendung mangelt.

Doch ſuchte ich redlich Einſicht in die Naturgeſetze und einen richtigen Weg des Unterrichts. Meine Arbeit war bei allen Unvollkommenheiten nicht ohne Segen.

Mögte ſie fernerhin zur Erweckung der Wahrheit dienen und zur Förderung richtiger Erkenntniß der Werke Gottes!

Herr wie ſind deine Werke ſo groß und viel, du haſt ſie alle weislich geordnet, und die Erde iſt voll deiner Güter!

Giebichenſtein, den 22. Oktober 1820.

Einleitung.

I.
Kryſtalle.

Der Lehrer zeige den Schülern einfache regelmäßige Kryſtalle, etwa Würfel von Flußſpath, Bleiglanz. Wo möglich bereite er eine Auflöſung, z. B. von Alaun, damit ſie ſehn, wie ſich allmählig Kryſtalle bilden. Iſt er an einem Orte, wo Vitriol, Zucker, Alaun ꝛc. bereitet wird, ſo kann er den Schülern in den Fabriken den Kryſtalliſationsprozeß zeigen.

Beſonders mache er darauf aufmerkſam, daß die Natur ſelbſt die Kryſtalle erzeugt, daß dem Flußſpath, dem Bleiglanz, die Würfelgeſtalt weſentlich iſt. Er zerſchlage einen Bleiglanzwürfel. Wenn dieſer in unzählige kleine glänzende Würfelchen zerſpringt, ſo fühle und

erblicke der Schüler hierin die innerlichſte Weſentlichkeit der Naturgeſtalten.

Der Lehrling wird dies auch erkennen, wenn man ein Modell von Holz oder Pappe daneben legt. Er wird ſehn, wie Menſchenverſtand und Menſchenhand auch regelmäßige Geſtalten bilden können, die Geſtalt aber der geſtalteten Maſſe — Pappe und Holz — nicht innerlich weſentlich eigen iſt.

Bemerkt der Schüler etwa bei Betrachtung einer Druſe von Flußſpathwürfeln, daß doch kein Kryſtall ein vollkommener Würfel ſey, fühlt er, daß ein Schein geſetzloſer Willkühr das Geſetz der Bildung verſchleiert, ſo mag er die wichtige Scheidung zwiſchen dem weſentlich Geſetzlichen und dem anſcheinend Geſetzloſen der Kryſtalle finden. Dieſe beruht darauf, daß die Größe der Kryſtallwinkel unwandelbar iſt, während die Größe der Kryſtallflächen wechſelt. — Bei den meiſten Schülern dürfte aber dieſe Scheidung beſſer verſchoben werden.

II.

Stellung des Kryſtalls.

Jeder Kryſtall muß bei der Betrachtung auf eine beſtimmte, ſeiner Geſtalt gemäße, Weiſe geſtellt oder gehalten werden, wodurch die Eigenthümlichkeit und Schönheit dieſer Geſtalt am meiſten in die Augen ſpringt, am Faßlichſten wird. Das 4flach und der Würfel müſſen auf eine ihrer Flächen geſtellt werden, das 8flach auf eine Axe u. ſ. w.

Man ſtelle jeden der 3 genannten Körper auf eine Kante, und man wird ſich von der Nothwendigkeit einer richtigen Stellung überzeugen, durch den Misanblick, den verworrenen ja widerlichen Eindruck, den ſie bei der falſchen Stellung machen. Wer einen Kryſtall zeichnen, oder auch nur beſchreiben ſoll, erfährt dies.

Der Lehrer halte die Modelle eines Würfels, 4flachs, 8flachs und anderer einfachen Körper dem Schüler in verſchiedenen Stellungen vor, und frage: welche Stellung die richtige ſey. Mit dieſer Wahl der richtigen Stellung muß bei der Betrachtung jedes Kryſtalls angefangen werden. Es iſt ein gutes Zeichen für den mathematiſchen Schönheitsſinn, wenn der Anfänger unter mehreren Stellungen, in welchen man ihm ein Kryſtallmodell hinhält, die richtige herausfindet; ein böſes Zeichen, wenn er meint, die Stellung ſey gleichgültig.

Der Anfänger erhält zuerſt einfache Geſammteindrücke von Kryſtallen, er fühlt die Schönheit ihrer Geſtalten, ohne ſich ihrer mathematiſchen Verhältniſſe bewußt zu werden. Aus dieſen erſten einfachen Geſammteindrücken entwickelt ſich allmählig beſonnene mathematiſche Einſicht in die Schönheit. Wem der einfache Schönheitsſinn für die einfachen Geſammteindrücke fehlt, dem fehlt der Kern, aus welchem ſich ein ächtes mathematiſches Begreifen ausbildet.

III.

Flächen, Kanten, Ecken der Kryſtalle.

Wenn der einfache Geſammteindruck eines Kryſtalls empfangen iſt, ſo beginnt die Scheidung jenes Eindrucks in ſeine Elemente. Wir ſehn am Kryſtall Flächen, welche ſeine Oberfläche oder Umgränzung bilden, Kanten, deren jede eine Gränzlinie zwiſchen zweien Flächen iſt, und Ecken, Punkte, in welchen 3 oder mehr Flächen und Kanten zuſammenſtoßen.

Die Flächen ſind theils regelmäßige — gleichſeitige und gleichwinklige Dreiecke, Vierecke ꝛc., theils mehr oder minder unregelmäßige aller Art.

Die Kanten theilen ſich in ſtumpfe, rechtwinklige und ſcharfe. Die ſtumpfſte Kante iſt kleiner als 2 Rechte oder als 180°, die ſchärfſte größer als 0°, die rechtwinklige Kante von 90° ſteht in der Mitte.

Fällt man 2 Linien auf jede der 2 Flächen welche eine Kante bilden, eine, ſenkrecht auf denſelben Punkt dieſer Kante, ſo iſt der Winkel, den jene 2 Linien bilden der Kantenwinkel. Man mißt ihn durch einen Winkelmeſſer. (Goyonmeter).

Die Summe der Flächenwinkel, welche um eine möglichſt ſtumpfe Ecke liegen, muß kleiner als 4 Rechte ſeyn. Denn die Summe der Winkel, welche rings um einen Punkt der Ebene liegen, beträgt 4 Rechte. Ein ſolcher Punkt kann aber als das unerreichbare Ziel der

ſtumpfſten Ecke betrachtet werden. — Die Summe der Flächenwinkel der möglich ſpitzeſten Ecke muß größer als o ſeyn. —

Je nachdem 3, 4, 5 ꝛc. Kanten an einer Ecke zuſammenſtoßen, wollen wir dieſelbe eine 3, 4, 5kantige Ecke nennen *)

Flächen, Kanten und Ecken eines Körpers ſind entweder gleicher Art oder verſchiedenartig. So hat der Würfel 6 gleiche Flächen, 12 gleiche Kanten, 8 gleiche Ecken. Das Rauten12flach hat 12 gleiche Flächen, 24 gleiche Kanten, aber 8 3kantige und 6 4kantige Ecken. Der Leuzit hat 24 gleiche Flächen, aber 2 verſchiedene Arten von Kanten, 3 verſchiedene Arten von Ecken.

Eine regelmäßige 6ſeitige Säule hat 2 Arten von Flächen und Kanten, aber nur eine Art Ecken. Man unterſcheidet nämlich bei einer Säule eine Art Flächen und Kanten, welche der Axe ⋕ und deren Zahl von 3 bis ins Unendliche gehen kann — Seitenflächen und Seitenkanten — von Endflächen, welche die Axe ſchneiden und deren Zahl ſtets 2; und Endkanten, Gränzlinien zwiſchen

*) Hr. Kerſten in der Ueberſetzung von Brochants Werk „die Kriſtalliſation" hat dafür: 3, 4, 5 flächige Ecke. Ich bildete die Zuſammenſetzungen: gleich-, ungleich-kantige Ecken, d. i. Ecken, an welchen eine Zahl gleicher Kanten zuſammentrifft, und Ecken, in welchen ungleiche Kanten zuſammenſtoßen. Ich gieng weiter, und bezeichnete, obwohl uneigentlich, doch kurz und unzweideutig, die Axen, welche durch gleichkantitige oder ungleichkantige Ecken begränzt werden, mit dem

Na-

Seiten und Endflächen, deren Zahl doppelt ſo groß als die Zahl der Seitenkanten *).

An einem Körper findet ſich nie eine einzelne Fläche, Kante oder Ecke einer Art, ſondern wenigſtens ein Paar. Jeder Fläche eines Kryſtalls läuft in der Regel eine ähnliche Fläche gleich, jeder Kante eine oder mehrere gleiche Kanten, jeder Ecke liegt an derſelben Axe eine ähnliche Ecke gegenüber **).

Um dem Schüler das hier Vorgetragene beizubringen, verfahre man etwa ſo: Man laſſe ihn zuerſt an Modellen der 5 regelmäßigen Körper die Zahl der Flächen, Kanten, Ecken angeben, dann wie die Flächen geſtaltet ſind, ob die Kanten ſcharf, rechtwinklig oder ſtumpf, wie vielkantig die Ecken.

Von den vollkommen regelmäßigen Körpern gehe man zu denen über, deren Flächen, Kanten und Ecken von verſchiedener Art ſind. Da muß der Schüler nicht blos im Allgemeinen die Zahl von Flächen, Kanten und Ecken angeben, ſondern er ſoll beſtimmen wie viel und welche Arten von Flächen ꝛc. und wie viele Flächen von jeder Art.

Namen: gleich= oder ungleichkantige Axen. So hat der Leuzit 6 gleich 4kantige Ecken, 12 ungleich 4kantige Ecken, 3 gleich 4kantige Axen, 6 ungleich 4kantige Axen.

*) Werners Tafel betrachte ich mit mehrern als niedrige Säule.

**) Nur bei dem 4flach finden ſich Ausnahmen. Vergleiche Brochants angeführtes Werk.

Die gleichartigen Flächen, Kanten und Ecken, müſ-ſen nicht regellos zuſammengezählt, ſondern, wo es nur immer geht, gruppenweiſe zuſammengefaßt werden. Als Beiſpiel diene der Mittelkryſtall von Würfel und 8flach. Seine 24 Kanten ſind nicht einzeln zuſammenzuzählen, ſondern ſo zuſammenzufaſſen. Entweder ich überblicke wie je 4 um 6 Würfelflächen (6 × 4 = 24) oder wie je 3 um 8 Flächen des 8flachs (8 × 3 = 24) liegen. Die Kanten des Leuzits laſſen ſich als 6 × 4 und 8 × 3 Kan-ten zuſammenfaſſen, jene an den 6 gleich4kantigen, die-ſe an den 8 3kantigen Ecken zuſammenſtoßend.

Hierbei iſt aber vorzüglich darauf zu achten, daß eben nur Gleichartiges zuſammengefaßt werde. Das letzte Beiſpiel aufzunehmen, ſo würde man freilich auch die richtige Kantenzahl des Leuzits herausbringen, wenn man die 12 ungleich 4kantigen Ecken ins Auge faßte. 12 × 4 = 48. Aber 24 dieſer Kanten ſind von den 24 andern verſchieden, und dürfen daher nicht mit dieſen zu-ſammengefaßt werden. Es iſt ſelbſt nicht gleichgültig ob man ſagt: der Leuzit hat 6 × 4 und 8 × 3 Kanten, oder 4 × 6 und 3 × 8. Letzteres zeugt von Mangel an An-ſchauung. Am wenigſten darf die Kanten- und Eckenzahl aus der gegebenen Zahl und Art der Flächen durch eine Berechnung (Euclid. XV. 6.) herausgebracht werden, Anſchauung und Rechnung müſſen vielmehr ganz zuſam-menfallen.

Für Schüler, welche völlige Neulinge in der Raumlehre ſind, laſſen ſich bei Betrachtung der Flächen

die regelmäßigen Figuren durchnehmen, etwa vom Dreieck bis zum Zwölfeck. Hierauf insbeſondere die verſchiedenen Arten des △ecks, Vierecks ꝛc. Es iſt hier auch die Bezeichnung der Winkel nach Graden beizubringen, am Beſten, indem man den Gebrauch des Winkelmeſſers lehrt.

IV.

Kryſtallverwandlung.

Kein Kryſtall ſteht einſam, unveränderlich, für ſich, ſeine Geſtalt verwandelt ſich vielmehr in andere Geſtalten.

Dieſe Geſtaltverwandlung kann auf 2 entgegengeſetzte Weiſen dargeſtellt werden, als geſchähe ſie durch Wegnehmen oder durch Zuſetzen. Jene iſt Werners und Romé de l'Isles Darſtellungsweiſe, dieſe die Hauyſche.

Werner und Romé ſtellten es ſo vor, als werde ein Holzkryſtall durch Abſtumpfen, Zuſchärfen und Zuſpitzen in einen andern verwandelt.

Abſtumpfen heißt: eine Ecke oder Kante wegſchneiden — an die Stelle einer Ecke oder Kante Eine neue Fläche — Abſtumpfungsfläche — bilden. — Die Abſtumpfung einer Kante iſt regelmäßig, wenn die Abſtumpfungsfläche mit den beiden Flächen, die in der abgeſtumpften Kante zuſammengränzen, gleiche Winkel bil-

det. — Die Abſtumpfung einer gleichkantigen Ecke iſt regelmäßig, wenn ſie von allen Kanten, die in der Ecke zuſammenſtoßen, gleich viel wegſchneidet, und ſonach rechtwinklig durch die Axe geht, deren Endpunkt jene Ecke iſt. — Das Gegentheil der regelmäßigen Abſtumpfung iſt die ſchiefe. —

Zuſchärfen heißt: an die Stelle einer Fläche, Kante oder Ecke zwei neue Flächen ſetzen. Der Ausdruck bedeutet ſo viel, als eine Schärfe bilden, weil jede Schärfe, z. B. die eines Meſſers, durch 2 Flächen gebildet wird. — Die Flächen heißen Zuſchärfungsflächen, die von beiden gebildete Kante: Zuſchärfungskante. Man beſtimme hierbei den Punkt oder die Linie, auf welche das zu ſchärfende Meſſer aufzuſetzen iſt. Z. B. Soll die Endfläche einer 4ſeitigen Säule zugeſchärft werden, ſo kann man die Zuſchärfungsflächen eben ſo wohl auf 2 Seitenkanten als auf 2 Seitenflächen aufſetzen.

Zuſpitzen heißt: an die Stelle einer Ecke oder Fläche eine neue Ecke oder Spitze durch drei oder mehr neue Flächen bilden. Dieſe Flächen heißen Zuſpitzungsflächen, die Kanten, deren jede von je 2 Zuſpitzungsflächen gebildet wird, Zuſpitzungskanten, die neue Ecke, in welcher alle Zuſpitzungsflächen und Zuſpitzungskanten zuſammentreffen, iſt die Zuſpitzungsecke.

Es muß, wie beim Zuſchärfen, bemerkt werden, auf welche Punkte oder Linien das Meſſer beim Zuſpitzen aufgeſetzt wird. Z. B. bei einer rechtwinkligen 4ſeitigen Säule, deren Endflächen mit 4 Flächen zuzuſpitzen

ſind, können die Zuſpitzungsflächen auf die Seitenflächen oder auf die Seitenkanten aufgeſetzt werden. —

Dieſe 3 Begriffe von Abſtumpfen, Zuſchärfen und Zuſpitzen, welche in der Kryſtallehre unendlich oft vorkommen, müſſen dem Schüler feſt eingeprägt werden. Man gebe ihm deshalb nach Betrachtung der einfachen Körper, z. B. des Würfels, 8flachs ꝛc., dieſelben Körper mit abgeſtumpften oder zugeſchärften Kanten, zugeſpitzten Ecken ꝛc. und laſſe ſie beſchreiben. Noch feſter prägt ſich dies ein, wenn der Schüler ſelbſt die Modelle jener einfachen Körper von Holz oder zur Noth von Seife oder Möhren abſtumpft, zuſpitzt, zuſchärft. Denn dieſe Ausdrücke werden nur dann richtig verſtanden und gebraucht, wenn man das Schneiden nicht aus den Augen verliert *).

Iſt der Schüler geübt, gleichartige und ungleichartige Flächen, Kanten und Ecken eines Körpers gehörig zu unterſcheiden, ſo wird ihn bei aufmerkſamer Betrachtung der Kryſtallverwandlung ein wichtiges Geſetz, das (von Hauy zuerſt ausgeſprochene) Geſetz des Ebenmaaßes, mehr oder minder klar entgegentreten. Dies lautet: wird eine Fläche, Kante, Ecke eines Kryſtalls verändert, ſo werden alle gleichartigen Flächen, Kanten und Ecken deſſelben auf gleiche Weiſe verändert, abgeſtumpft oder zugeſchärft oder zugeſpitzt. Dagegen iſt keine mathematiſche Nothwendigkeit, daß dann un-

*) Mehrere nähere Beſtimmungen der Art des Abſtumpfens, Zuſchärfens und Zuſpitzens, will ich erſt im Verfolg geben.

gleichartige Flächen, Kanten und Ecken auf dieſelbe Weiſe oder überhaupt verändert werden. Das 4flach hat z. B. 6 gleiche Kanten, 4 gleiche Ecken. Wird eine ſeiner Kanten abgeſtumpft, ſo geſchieht dies allen Kanten, wird eine ſeiner Ecken abgeſtumpft, ſo geſchieht dies allen Ecken. Betrachten wir dagegen das Rauten12flach. Dies hat 6 4kantige, 8 3kantige Ecken. Wird eine ſeiner 4kantigen Ecken abgeſtumpft, ſo geſchieht dies allen 4kantigen Ecken, nicht aber deshalb den 3kantigen, wird eine ſeiner 3kantigen Ecken abgeſtumpft, ſo geſchieht dies allen 3kantigen Ecken, nicht aber deshalb den 4kantigen. Wir werden im Verfolg dies Geſetz ſehr häufig erwähnen. *)

Vom Schüler ward zuerſt gefordert, an einem Kryſtalle die verſchiedenen Arten von Flächen als verſchiedenartig zu trennen, die gleichartigen zuſammen zu faſſen. Später entſteht die ſchwierigere Frage: wenn du beim zuſammengeſetzten Kryſtall (Kryſtall von verſchiedenartigen Flächen) die einzelnen Arten von Flächen jede für ſich ſo vergrößerſt, daß alle übrigen Flächen ſchwinden, was für einzelne einfache Körper entſtehn dann? Oder entſteht durch Vergrößerung dieſer oder jener Art von Flächen kein vollſtändiger neuer Körper? Müſſen mehrere Arten Flächen zuſammentreten, um einen ſolchen zu bilden? Z. B. man hat einen Würfel mit abgeſtumpften Ecken und Kanten. Es iſt nicht genug die 2 Arten von Abſtumpfungsflächen, jede für ſich, aufzu-

*) Zwei Ausnahmen von dieſem Geſetz ſcheinen ſtatt zu finden. Wir werden ſie kennen lernen.

faſſen, beide von den Würfelflächen zu unterſcheiden, ſondern es frägt ſich: wenn die Abſtumpfungsflächen der Ecken oder die der Kanten ſo vergrößert werden, daß alle übrigen Flächen ſchwinden, welche einfachen Körper entſtehn dann? — Dieſe Frage zu beantworten, bedarf der Anfänger Reihen von Kryſtallen oder Kryſtallmodellen. Hat er einen Würfel mit abgeſtumpften Ecken, ſo bedarf er einer Reihe, welche mit dem Würfel beginnt, dem ſich ein Würfel mit ſchwach abgeſtumpften Ecken anſchließt. Dieſem folgen Geſtalten, in welchen die 8 Abſtumpfungsflächen zunehmen, die Flächen des urſprünglichen Würfels abnehmen und zuletzt o werden, da denn das 8flach hervorgeht. Hat er einen Würfel mit abgeſtumpften Kanten, ſo bedarf es einer Reihe, welche aus dem einfachen Würfel durch den Würfel mit abgeſtumpften Kanten in das Rauten12flach führt.

Giebt man dem Schüler die, einen ſolchen Uebergang aus einem einfachen Körper in einen zweiten einfachen Körper, darſtellenden Modelle, um dieſelben in gehöriger Folge zu legen, ſo iſt aufs Strengſte darauf zu ſehn, daß die Modelle nicht blos in richtiger Folge, ſondern auch in völlig übereinſtimmender Stellung gelegt werden. Wenn z. B. bei dem Uebergange aus dem Würfel ins 8flach, der Würfel auf einer ſeiner waagrechten Flächen ſo ſteht, daß die 4 ſenkrechten Flächen gerade in Mitternacht, Mittag, Morgen und Abend gerichtet ſind, ſo muß der Würfel mit (mehr oder minder) abgeſtumpften Ecken, auch auf einer waagrechten Fläche ſo ſtehn.

daß

daß ſeine ſenkrechten Flächen gerade in Mitternacht ꝛc. gerichtet ſind. Zuletzt werde das 8flach (auf einer holen Unterlage) ſo auf eine Ecke — bei ſenkrechter Axe — geſtellt, daß ſeine 4 Mittelecken in Mitternacht ꝛc. gerichtet ſeyn. Eine Uebergangsfolge, deren Glieder nicht in völlig übereinſtimmender Stellung ſind, verwirrt, ſtatt daß bei völliger Uebereinſtimmung das Betrachten der Folge zum klarſten, ſicherſten Auffaſſen der Umwandlung führt.

Wir werden weiterhin viele Uebergangsfolgen betrachten, und beſonders erforſchen, wie ſich jedesmal die 2 einfachen Körper, welche an beiden Enden der Reihe ſtehn, zu einander verhalten. In den 2 angeführten Fällen, Würfel und Achtflach — Würfel und Rauten12flach. —

Hat ein zuſammengeſetzter Körper die Flächen von 2 oder mehreren einfachen Körpern, ſo frägt es ſich: welchen dieſer einfachen Körper ſoll man bei der Beſchreibung als den veränderten Körper betrachten? Ich beziehe mich auf das oben gegebene Beiſpiel. Ich beſchrieb ſo: ein Würfel mit abgeſtumpften Kanten und Ecken. Wann muß die Beſchreibung lauten: ein Rauten12flach mit abgeſtumpften 3 und 4kantigen Ecken — Wann ſo: ein 8flach mit abgeſtumpften Kanten und Ecken? Vorläufig die nicht hinlänglich ſcharfe Antwort: man lege bei der Beſchreibung die Geſtalt des Körpers (als des Veränderten) zum Grunde, welche in dem zuſammengeſetzten Kryſtall am meiſten in die Augen ſpringt,

den Geſammteindruck beſtimmt. Herrſchen — im angeführten Falle — die Würfelflächen vor, ſo beſchreibe man den Körper als einen Würfel mit abgeſtumpften Ecken und Kanten, herrſchen die des Rauten12flachs vor, dann als Rauten12flach ꝛc.

Ich ſagte oben: Romé und Werner hätten die Kryſtallverwandlung dargeſtellt, als geſchähe ſie durch Wegnehmen. Dies führte ich aus, da ich zeigte, wie beide Naturforſcher ſich die Veränderungen als durch Abſtumpfen, Zuſchärfen, Zuſpitzen eines gegebenen Holzkörpers gedacht.

Haüy, ſagte ich, denke ſich dagegen die Kryſtallverwandlung, als geſchähe ſie, im Gegentheil, durch Hinzuſetzen. Wenn Werner z. B. den Würfel durch Abſtumpfen ſeiner Kanten in ein Rauten12flach verwandelt, ſo ſtellt Haüy vor, als geſchähe dies, indem ſich auf jeder Würfelfläche eine vierſeitige Pyramide erhöbe, deren Grundkantenwinkel 45° ꝛc. *).

Dies führt, wie wir ſehn werden, auf den ſchon früher bekannten Gegenſatz umſchriebener und eingeſchriebener Körper. Romé u. Werner ſchreiten vom

*) Die Haüyſche Art die Kryſtallverwandlung zu betrachten, kann dem Schüler am Beſten durch Modelle anſchaulich gemacht werden, welche ſo eingerichtet ſind, daß man den gegebenen einfachen Körper durch Aufſetzen anderer Körper, die mit Stiftchen befeſtigt werden, in einen neuen Körper verwandelt. Im angeführten Falle gebe man das Modell eines Würfels, auf deſſen 6 Flächen, 6 4ſeitige Pyramiden mit Stiftchen befeſtigt werden, wodurch das Rauten12flach erzeugt wird.

umſchriebenen Körper zu dem eingeſchriebenen fort, Hauy umgekehrt, vom eingeſchriebenen zum umſchriebenen. —

Im Verfolg werden wir finden, daß ſich ein Kryſtall, A, nicht blos unmittelbar in einen zweiten, C, verwandelt, ſondern auch mittelbar, da ſich A zuerſt in B, B in C umgeſtaltet.

Kryſtalle, welche ſich nun unmittelbar oder mittelbar, auf eine dem Geſetz des Ebenmaaßes entſprechende Weiſe, in einander umgeſtalten, heißen verwandte Kryſtalle.

Eine Kryſtalſippe iſt ein Inbegriff verwandter Kryſtalle. — Den Begriff eines Kryſtallgeſchlechts, als Inbegriff verwandter Kryſtallſippen, werde ich ſpäter zu entwickeln ſuchen. —

V.

Kryſtallmodelle.

Ich erwähnte ſchon, daß man die Kryſtalle in Holz, Pappe u. ſ. w. nachgebildet. Und zwar nicht blos einzelne Geſtalten, ſondern auch die Folgereihen von Geſtalten, welche ſich bei Umwandlung eines Kryſtalls in andere Kryſtalle bilden. Gewöhnlich macht man alle Geſtalten ſolcher Reihen von gleicher Größe. Z. B. bei einer Folge vom Würfel ins 8flach, iſt der Würfel ungefähr ſo groß als das 8flach. — Man kann aber auch die Folge der Modelle verkleinernd ſchneiden. In der eben angeführten ſchritte man von einem Würfel zu dem 8flach fort, deſſen Axe der Würfelkante gleich, und von dem 8flach

weiter zu einem zweiten Würfel, deſſen Kante ⅔ der Axe des 8flachs.

Für Modelle von gleicher Größe ſcheint dies zu ſprechen, daß ſie die Aufmerkſamkeit des Schülers ganz auf die Geſtalt, abgeſehn von aller Größe, lenken. Er muß ſich beim Legen der Folgen einzig nach der Geſtalt zurechte finden, da er hingegen bei Modellen mit abnehmender Größe an der Verkleinerung eine Art Anhalten hat. —

Allein dieſe Verkleinerung iſt — wofern nicht große Sprünge in den Reihenfolgen der Modelle ſtatt finden — in der Regel nicht ſo ſtark hervortretend, daß ſie den Lehrling ganz unzweideutig leitete. — Dagegen haben die Modelle mit abnehmender Größe die entſchiedenſten Vorzüge vor den herkömmlichen gleich großen. Ich bemerke nur dieſe.

1. Es iſt nothwendig die aufgeſtellten Kryſtallfolgen vom Schüler auf Wernerſche Weiſe beſchreiben zu laſſen. Sind nun die Modelle von ungefähr gleicher Größe, ſo ſtehn Modelle und Beſchreibung im beſtimmteſten Widerſpruche. Z. B. die Uebergangsfolge aus dem Würfel in das 8flach wird ſo beſchrieben. 1) Ein Würfel. 2) Ein Würfel mit ſchwach abgeſtumpften Ecken. 3) Der Mittelkryſtall zwiſchen dem Würfel und dem 8flach. — Bis hierher liegt gewöhnlich derſelbe Würfel zum Grunde und die Beſchreibung paßt. Fährſt du aber nun vom Mittelkryſtall fort: ich ſtumpfe weiter und weiter ab, bis zuletzt die Würfelflächen ſchwinden und das 8flach hervorgeht; ſo widerſpricht bei den gewöhnlichen Modellen der Anblick der Modellreihe dieſer Beſchreibung.

Denn die Axe des 8flachs, welches der Beſchreibung nach als aus dem erſten Würfel durch ſolche Abſtumpfung herausgeſchnitten, betrachtet werden müßte, iſt gewöhnlich weit länger als die Kante jenes Würfels — und dieſer ſollte ſie gleich ſeyn.

Iſt die Uebergangsfolge dagegen in Kryſtallmodellen von abnehmender Größe gelegt, ſo paßt die Beſchreibung genau zu den Modellen. Solche Uebergangsfolge nöthigt

2. den Schüler aufs Genaueſte in die Verwandtſchaftsverhältniſſe der Körper einzugehn. Vergleicht er insbeſondere die äußerſten Körper jeder Reihe, ſo wird er die Punkte und Linien aufſuchen, welche in dieſen Körpern einander entſprechen. Es wird zugleich eine bei Anfängern ſehr gewöhnliche Verwechſelung vermieden, welche durch Kryſtallmodelle von ungefähr gleicher Größe ſelbſt mit veranlaßt wird, nämlich die Verwechſelung von Verhältniſſen, welche einem eingeſchriebenen Kryſtall zukommen, mit denen die einem umſchriebenen eigen ſind. Hiervon weiterhin Beiſpiele. —

Außer dieſen Modellen *), welche die Kryſtallumgeſtaltung in einer Reihenfolge darſtellen, muß ich das empfehlen. Man mache z. B. einen Würfel von Pappe, eine Fläche laſſe man offen. In dieſen Würfel bilde man ein 8flach, deſſen Ecken in die Flächenmitten jenes Wür-

*) Wahrſcheinlich wird der durch ſeine Globen rühmlich bekannte Hr. Kummer in Berlin, ſolche Modelle in einer vortrefflichen Maſſe zum Verkauf nach Hrn. Bäntſch's ſehr gut gerathenen Holzmodellen, anfertigen. Ich werde zur Zeit das Nähere hierüber in der Iſis anzeigen.

feſs treffen. Eine Fläche dieſes 8flachs laſſe man wieder offen, und bilde in dieſes 8flach einen 2ten Würfel, deſſen Ecken in die Flächenmitten des 8flachs treffen. Man laſſe wiederum von dieſem zweiten Würfel eine Fläche offen, und beſchreibe in ihn ein 2tes 8flach. — Wie in dieſem Falle, verfahre man mit den äußerſten Körpern aller Reihenfolgen. Ein ſolches Modell bietet auf Einen Blick das Verhältniß jener Körper *).

Bei dieſer Gelegenheit will ich der Kryſtallnetze erwähnen. Es wird verlangt: die Flächen, welche die Oberfläche eines Körpers bilden, in Einer Ebene zu verzeichnen, und zwar nicht einzeln, ſondern zuſammenhängend. Die ſo verzeichneten Flächenlinien laſſen ſich dann

*) Herr Bezold, Königl. Baierſcher Bergofficiant, hat zuerſt mit ungemeinem Fleiß, Mühſamkeit und Geſchick Pappmodelle zu dem Hauy'ſchen Werke über die Mineralogie gemacht. Nach der Art wie Hauy z. B. bei den in Kupfer geſtochenen Kalkſpathkryſtallen gethan, hat er die primitive Form in den holen Kryſtall hineingebildet. Er arbeitete dieſe Modelle, ſo viel ich weiß, für den Herrn Geheimen Rath von Leonhard. Ich ſah einige derſelben bey Herrn Profeſſor Schweigger. Dieſe veranlaßten mich zuerſt Wackernagel zu bitten, Modelle der Art zu machen, wie ich eben im Texte beſchrieben. Er hat dies höchſt fleißig und ſauber ausgeführt. Der ſehr geſchickte Herr Buchbindermeiſter und Papparbeiter Greve in Berlin, bekanut durch eine von ihm neu herausgegebene Anweiſung zur Buchbinderkunſt, wird wahrſcheinlich nach Wackernagels Vorarbeit mit Beihülfe Maßmanns dieſe Modelle (es ſind für jetzt ungefähr 20) zum Verkauf anfertigen. Ein Probemodell, welches er mir zuſtellen lies, war ſehr gut gerathen. Ich werde, ſobald er fertig iſt, das Nähere in der Iſis anzeigen.

in Pappe theis aus- theils einſchneiden, und die Flächen ſelbſt in die beſtimmten Körper zuſammenfalten.

Der leitende mathematiſche Grundſatz bei jenem Verzeichnen iſt: die Winkel um den Punkt einer Ebene betragen zuſammen 4 Rechte, die Flächenwinkel, welche um eine Ecke liegen, aber weniger als 4 Rechte. Sollen nun die Flächen, welche um eine Ecke liegen, um einen Punkt in einer Ebene verzeichnet werden, ſo umgeben ihre Winkel nicht den Punkt ringsum, es bleibt vielmehr eine Lücke, welche gerade ſo groß, als die Summe der Winkel um die Ecke kleiner als 4 Rechte iſt.

Als Beiſpiel mögen Würfel und 4flach dienen. Die Flächenwinkel, welche um eine Würfelecke liegen, betragen 3 Rechte. Verzeichnet man 3 Würfelflächen ſo, daß ſie in einen Punkt der Ebene znſammentreffen, ſo bleibt eine Lücke, welche einen Rechten beträgt. Dieſe Lücke läßt ſich entweder zwiſchen den 3 Flächen vertheilen, ſo daß zwiſchen je 2 Flächen ein offener Winkel von $\frac{1}{3}$ Rechtem (oder 30°) bleibt, oder man vereinigt die 3 Drittel Rechte in Einen rechten Winkel. — Die Summe der Flächenwinkel, welche um eine Ecke des 4flachs liegen, beträgt 3 × 60 oder 180°. Verzeichnet man 3 Flächen des 4flachs, welche in einer Ecke zuſammentreffen, um einen Punkt einer Ebene, ſo bleibt wiederum eine Lücke von 2 Rechten. Man läßt auch hier entweder zwiſchen je 2 verzeichneten Flächen einen offenen Winkel von 60°, oder vereinigt ſolche 3 offene Winkel in einen einzigen von 180° — in eine gerade Linie. —

Wenn die Schüler nur irgend Geſchick in Holz zu ſchneiden oder in Pappe zu arbeiten zeigen, ſo laſſe man

von ihnen die Verwandtſchaftsfolgen der Kryſtalle in Holz oder Pappe darſtellen, und zwar in Modellen mit abnehmender Größe. *)

*) Wahrſcheinlich werden Sauermann und Wackernagel eine Anweiſung, Kryſtallnetze zu verfertigen, ausarbeiten und die Netze ſelbſt in Steindruck herausgeben.

I.

Das Würfelgeſchlecht.

I.

Das Würfelgeſchlecht.

§. 1.

Die Sippen des Würfelgeſchlechts.

Es ſind ihm keine Sippen untergeordnet, wohl aber 2 Nebenſippen zugeordnet, nämlich die des regelmäßigen 4flachs und des Kies12flachs.

§. 2.

Die Hauptkörper des Würfelgeſchlechts.

A. Der eigentlichen Würfelſippe.
   1. Der Würfel.
   2. Das 8flach.
   3. Das Rauten12flach.
   4. Der Leuzit (die Leuzitkryſtalliſation [1]).

1) Es ſey mir erlaubt, den langen Wernerſchen Namen: „Leuzitkryſtalliſation" in „Leuzit" zu verkürzen.

B. Der Nebenſippe des 4flachs.

1. Das 4flach.

C. Der Nebenſippe des Kies12flachs.

1. Das Kies12flach.

2. Das Kies24flach.

Wir wollen die genannten Körper, das Kies12flach und Kies24flach ausgenommen, zuerſt einzeln betrachten, viele Verhältniſſe derſelben jedoch erſt ſpäter bei Entwicklung der Verwandtſchaften.

§. 3.

Der Würfel.

Er werde auf eine Fläche geſtellt.

Er hat 6 Gevierte, 12 rechtwinklige Kanten, 8 Ecken, an deren jeder 3 rechte Winkel und 3 Kanten zuſammenſtoßen. 12 Geren ſind einander gleich, eben ſo 4 (Eck) Axen. Jede der 3 Flächenaxen iſt gleich einer Kante und 4 #en Kanten #, jede der 6 Kantenaxen iſt gleich einer Gere und 2 #en Geren #.

Jede Gere bildet mit 2 ihr angrenzenden einander #en Kanten rechte Winkel.

Hält man den Würfel zwiſchen einer ſenkrechten Axe, ſo bilden je 3 Grundgeren der oberen, je 3 Grundgeren der untern Axenecke 2 waagrechte, die Axe rechtwinklig ſchneidende gleichſeitige Dreiecke.

Dieſe Dreiecke ſind Grundflächen der durch ſie abgeſchnittenen Ecken oder 3ſeitigen Pyramiden.

Fig. 1 Fig. 1. Man hälfte einen Würfel durch 2 #e Geren ab und cd und durch 2 angrenzende #e Kanten ac

und bd. Der Schnitt entblößt das Rechteck abcd. Dies Rechteck wollen wir forthin das Würfelrechteck nennen. ad und cb ſind 2 ſich in f kreuzende Axen.

Man halte nun den Würfel zwiſchen der ſenkrechten Axe ad.

Ich ziehe die Linie von der Ecke c nach der Gerenmitte e, ſo iſt dies eine Höhenlinie des erwähnten Grunddreiecks der Würfelecke a, oder der 3ſeitigen Pyramide. Den Grundkantenwinkel aec dieſer Pyramide finden wir durch Meſſung zu ungefähr 55° [2]). Da nun der zweite Winkel im Dreieck eah der Winkel ahe $= 90^\circ$ iſt, ſo muß der Winkel eah $= 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = 35^\circ$ ſeyn.

Der Winkel hac im Dreieck cah iſt $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. Die Würfelaxe ad bildet ſonach mit der Würfelgere ab einen Winkel von 35°, mit der Würfelkante ac einen Winkel von 55°.

Betrachten wir das Dreieck abf. Der Winkel baf iſt = am Winkel abf $= 35^\circ$. Daher iſt der Winkel afb $= 180^\circ - (35^\circ + 35^\circ) = 110^\circ$. Ihm gleich iſt ſein Scheitelwinkel. Die zwei andern Scheitelwinkel um den Punkt f ſind demnach jeder von 70°.

Die Würfelaxen kreuzen ſich alſo unter 110° und 70°; erſtere Winkel liegen den Geren, letztere den Kanten des Würfels zu.

Daß ſich die Axen in dem Kreutzpunkte hälften, die Kanten- und Flächen-Axen in demſelben Punkte gehälf-

2) Ich gebe die Grade der Winkel in runden Zahlen an, ohne Zuſatz von Minuten und Secunden. So verfuhr auch Romé de l'Isle. Für ein A b c Buch genügt dies.

tet werden, iſt leicht zu beweiſen. Der Punkt iſt mithin Mittelpunkt des Würfels, Punkt der gleichweit von allen Ecken, Flächen- und Kanten-Mitten entfernt iſt.

Fig. 2 Fig. 2. Würfelrechteck. △ ahe ∾ △ chd da beide gleichwinklig. Die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen, verhalten ſich alſo gleich.

ah : hd = ae : cd. Da nun

cd = 2 ae ſo iſt hd = 2 ah.

Die Axe ad wird alſo durch ce in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ zertheilt.

Die Abſtumpfung einer Würfelecke durch ihre Grundgeren ſchneidet alſo $\frac{1}{3}$ von der Würfelaxe ab.

§. 4.

Das 8flach.

Hält man es gehörig zwiſchen einer ſenkrechten Axe, ſo erſcheinen 4 Dreiecke als Flächen einer obern, 4 als Flächen einer untern Pyramide; 4 Kanten als Kanten der obern, 4 als Kanten der untern Pyramide, 4 als Kanten an der waagrechten gemeinſchaftlichen Grundfläche beider; 2 Ecken als Polecken der ſenkrechten Axe, 2 Paar Ecken welche die gemeinſchaftliche Grundfläche begrenzen, als Polecken zweier waagrechten Axen.

Das 8flach hat nun 8 gleichſeitige △e, 12 ſtumpfe Kanten, 6 4kantige Ecken.

Die bloße Betrachtung eines 8flachs lehrt folgendes, was ſich durch Vergleichung deſſelben mit dem Würfel, wie wir ſehen werden, beweiſen läßt.

Je 4 in einer Ebene liegende Kanten bilden ein Geviert, 3 mal 4 Kanten bilden alſo 3 Gevierte, die ſich unter rechten Winkeln ſchneiden. 3 Axen bilden 6 Geren der 3 Gevierte, da jede Axe Gere zweier Gevierte iſt. Die Axen ſchneiden und hälften ſich in der Mitte der 3 Gevierte, die zugleich Mitte des 8flachs.

Fig. 3. abc ein gleichſeitiges △ des 8flachs. 3 Höhenlinien bf, cd, ae hälften Seiten und Winkel des △s und ſtehn ſenkrecht auf den gehälfteten Seiten. Im △ bfc iſt z. B. Fig. 3

der Winkel bei b = 30°
— — — c = 60°
— — — f = 90°

und fc = ½ bc. In jedem △ deſſen Winkel 90°, 60° und 30° iſt alſo die Seite welche dem Winkel von 30° gegenüber liegt, halb ſo groß als die Seite welche dem rechten Winkel gegenüber liegt (die Hypotenuſe). In Fig. 3. iſt △ agf ≅ △ bge, da af = be und 3 Winkel beider △e unter einander gleich ſind. Daher iſt ag = bg und wie auf gleiche Weiſe bewieſen wird = gc. Eben ſo iſt gf = ge = gd. g iſt alſo der Mittelpunkt des △s abc.

gf = ½ ag
gf = ge.
―――――
ge = ½ ag,

oder ag iſt ⅔, ge ⅓ der Linie ae.

Jede Linie aus dem Mittelpunkte eines gleichſeitigen △s nach einer Seitenmitte iſt alſo halb ſo lang, als

eine Linie aus demſelben Mittelpunkte nach einem Winkelpunkte.

Fig 4 Fig. 4. Die Linie de, welche eine Kantenaxe des 8flachs ſchneidend 2 △mitten verbindet iſt $\frac{1}{3}$ der (Eck) Axe ac und dieſer ⋕.

Denn △ abc ∾ △ bde. (Euclid VI. 6.) Daher de ⋕ ac, und de : ac = eb : bc = bd : ab = 1 : 3.

Fig. 5 Fig. 5. Die Linie de, welche eine Axe des 8flachs ſchneidend 2 △mitten verbindet, iſt $\frac{2}{3}$ der Kantenaxe ac (und dieſer ⋕) mithin auch $\frac{2}{3}$ der Kante.

△ dbe ∾ △ abc. (Euclid VI. 6). Daher de ⋕ ac und de : ac = ad : ab = ce : cb = 3 : 2.

§. 5.

Das Rauten12flach.

Man halte es ſenkrecht zwiſchen 2 4kantigen Ecken. Es hat 12 gleiche Rauten. 4 erſcheinen als Flächen einer obern, 4 als Flächen einer untern 4ſeitigen Pyramide, 4 liegen der Axe ⋕, und könnten als Abſtumpfungen der Ecken an der gemeinſchaftlichen Grundfläche der Doppelpyramide — bis in die Mitte der gemeinſchaftlichen Grundkanten — betrachtet werden.

Es hat 24 gleiche Kanten. 4 der obern, 4 der untern Pyramide, und 4 × 4 um die 4 ſenkrechten Flächen.

Es hat 6 4kantige Ecken, 2 Polecken der ſenkrechten Axe, 2 Paar Polecken zweier waagrechten Axen.

Es hat 8 3kantige Ecken, 4 liegen an den obern, 4 an den untern Pyramidenkanten.

Die Kanten laſſen ſich auch ſo zuſammenfaſſen. 6 × 4 laufen in 6 4kantigen Ecken zuſammen, oder: 8 × 3 laufen in 8 3kantigen Ecken zuſammen.

Man kann das Rauten12flach auch ſenkrecht zwiſchen 2 3kantigen Ecken halten. Dann erſcheint es als eine regelmäßige 6ſeitige Säule, an beiden Enden mit 3 Flächen zugeſpitzt, die Zuſpitzungsflächen auf die abwechſelnden Säulenkanten aufgeſetzt, und zwar ſo, daß auf den 3 Säulenkanten welche die obern Zuſpitzungsflächen tragen, keine untern Zuſpitzungsflächen aufſitzen.

Nun erſcheint der Körper ſo. 6 ſenkrechte Säulenflächen, 3 obere, 3 untere Zuſpitzungsflächen — 6 ſenkrechte Säulenkanten, 3 obere und 3 untere Zuſpitzungskanten, 6 obere, 6 untere von Säulen- und Zuſpitzungsflächen gebildete Kanten — 2 3kantige Polecken, der obern wie der untern liegen 3 3kantige Ecken überzwerch gegenüber; 3 4kantige Ecken welche an den obern, 3 welche an den untern Zuſpitzungskanten liegen.[3]). —

3) In der Folge wird es ſich ergeben, daß die Stellung des Rauten12flachs zwiſchen einer ſenkrechten 4kantigen Axe ſeiner Verwandtſchaft mit dem Würfel und 8flach, die zwiſchen einer ſenkrechten 3kantigen Axe ſeiner Verwandtſchaft mit dem 4flach entſpricht.

§. 6.

Der Leuzit.

Man halte ihn ſenkrecht zwiſchen 2 gleich 4kantigen Ecken. So erſcheint er als doppelt 8ſeitige Pyramide, deren Polecken mit 4 Flächen zugeſpitzt ſind, die Zuſpitzungsflächen auf die abwechſelnden Pyramidenkanten aufgeſetzt. 8 gleiche Kanten begrenzen die gemeinſchaftliche waagrechte Grundfläche.

So gehalten ſieht man 8 obere, 8 untere Pyramiden=, 4 obere, 4 untere Zuſpitzungs=Flächen. Alle 24 Flächen ſind Trapeze mit 2 gleichen längern und 2 gleichen kürzern Seiten.

Der Leuzit zeigt ferner 6 gleiche 4kantige gleichkantige Ecken, die ich Hauptecken nennen will. 2 begrenzen die ſenkrechte Axe, zwiſchen welcher man den Körper hält, die 2 Paar übrigen begrenzen 2 waagrechte in der 8ſeitigen gemeinſchaftlichen Grundfläche liegende Axen. Dieſe 3 Axen ſollen Hauptaxen heißen. Der obern und untern 4kantigen Polecke liegen überzwerch 4 obere und 4 untere 3kantige Ecken gegenüber. Dieſe 4 Paar Ecken begrenzen 4 3kantige Axen.

4 Kanten der obern, 4 der untern Polecke führen zu 4 und 4 ungleich 4kantigen Ecken, 4 andere ſolche Ecken ſind abwechſelnde Ecken an der waagrechten gemeinſchaftlichen Grundfläche. Dieſe 6 Paar Ecken begrenzen 6 ungleich 4kantige Axen.

Der Leuzit hat demnach 6 gleich 4kantige, 12 ungleich 4kantige und 8 3kantige Ecken. —

6 × 4 längere Kanten treffen in den 6 Hauptecken, 8 × 3 kürzere in den 8 3kantigen Ecken zuſammen.

§. 7.
Das 4flach.

Es ſtehe auf einer Fläche. Dieſe Fläche ſo wie 3 andere ſich in eine Spitze zuſammenneigende ſind gleichſeitige △e.

3 3kantige Ecken liegen an der Grundfläche, eine jenen gleiche bildet die Spitze.

3 ſcharfe gleiche Kanten liegen an der Grundfläche, 3 andere jenen gleiche verbinden die Spitze mit den Grundecken.

4 Linien aus den 4 Ecken auf die 4 gegenüberliegenden Flächen ſenkrecht gefällt, bilden die Axen.

Setze die Meſſerſchärfe längs einer 4flachskante und ſchneide durch 2 an beide Enden der Kante angrenzende Höhenlinien zur Mitte der gegenüber liegenden Kante. Das durch dieſen Schnitt entblößte von einer Kante und 2 Höhenlinien begrenzte △ wollen wir 4flachs Durchſchnitt nennen.

Fig. 6. 4flachs Durchſchnitt. Verbinde die Flächenmitten durch de. Fig. 6

△ dec ∾ △ abc. Euclid VI. 6.

Daher de ⧺ und $\frac{1}{3}$ der Kante ab. Denn es verhält ſich de : ab = cd : ca = ce : cb = 1 : 3.

Verwandtſchaftsverhältniſſe des Würfel- geſchlechts.

A. Die eigentliche Würfelſippe.

§. 8.

1) Würfel und 8flach.

Um die Verwandtſchaftsverhältniſſe anſchaulich zu machen bedarf es

1. Kryſtallmodelle welche in abnehmender Größe alle Umgeſtaltungsfolgen darſtellen. (Siehe die Einleitung.) Den erſten größten Kryſtall einer ſolchen Folge will ich durch hinzugefügtes A, den letzten kleinſten durch hinzugefügtes Z bezeichnen.
2. Bedarf es eines hohlen Modells des Kryſtalls A jeder Folge, in welchem der Kryſtall Z eingebildet iſt. Erſterer Kryſtall heißt auch der umſchriebene, letzterer der eingeſchriebene.

Ich wünſchte, jeder Leſer hätte ſolche Modelle vor Augen.

A. Der umſchriebene Würfel.

Durch regelmäßige Abſtumpfung der Würfelecken erhalte ich zunächſt einen Körper von 6 8ecken und 8 △en, deſſen 8ecke ſich bei weiterer Abſtumpfung in Gevierte verwandeln. Jedes Geviert iſt halb ſo groß als das Geviert des Würfels A, ſeine Seite = der halben Gere, ſeine Gere = der Seite des Würfels A. Die 12 Ecken fallen in die Mitten der Kanten des Würfels A.

Stumpfe ich nun # den 3ſeitigen Abſtumpfungsflächen weiter ab, ſo ſchneiden ſich je 2 dieſer Flächen in einer der 12 Ecken, es entſtehn 12 neue Kanten, und ſo das 8flach mit abgeſtumpften Ecken. Die Flächen des 8flachs ſind 6ecke, die Abſtumpfungsflächen — Ueberbleibſel der Flächen des Würfels A — bleiben Gevierte. — Schneide ich nun # den Flächen des 8flachs weiter, bis dieſe Ueberbleibſel ſchwinden — bis je 4 Abſtumpfungsflächen der Ecken des Würfels A in deſſen Flächenmitten eine 4kantige Ecke bilden — ſo entſteht das 8flach Z. Der Kryſtall dieſer Folge von 6 Gevierten und 8 △en iſt als Mittelkryſtall zwiſchen dem Würfel und 8flach zu betrachten, da derſelbe weder Kanten des Würfels noch des 8flachs hat.

Wir bilden nun das erhaltene 8flach Z in den hohlen Würfel A. Die 6 Ecken des 8flachs treffen, wie wir ſahen, in die 6 Geviertmitten des Würfels. Die 3 Axen des 8flachs Z ſind alſo = den Flächenaxen = den Kanten des Würfels A. Jede Kante des 8flachs läuft von einer Geviertsmitte des Würfels zur benachbarten, alle 12 ſind demnach gleich, alle △e des 8flachs ſind gleichſeitig. Die Linie von einer Würfelgeviertmitte zur benachbarten iſt = der Linie welche # einer Gere von dem Hälftpunkte einer Würfelkante zum Hälftpunkte der benachbarten Kante derſelben Fläche gezogen wird, alſo = der halben Würfelgere. Dieſer iſt demnach die Kante des 8flachs Z gleich.

Fig. 7. Das Geviert abcd iſt eine Fläche entblößt Fig. 7
durch einen Schnitt durch die Mitten 4 #r Kanten des umſchriebenen Würfels. 4 Kanten des eingeſchriebenen

8flachs bilden das Geviert efgh [4]). 3 mal 4 ſolcher Kanten bilden alſo 3 Gevierte, deren 6 Geren mit 3 Axen des 8flachs und den 3 Flächenaxen des umſchriebenen Würfels eins ſind, indem jede Axe Gere zweier ſich unter rechtem Winkel ſchneidender Gevierte iſt (§. 4.). Die Axen ſchneiden ſich unter rechten Winkeln im Mittelpunkte des Würfels A wie des 8flachs Z.

Fig. 8 Fig. 8. Würfelrechteck abcd.

Man denke ſich die 4 Ecken a, b, c, d jede durch ihre Grundgeren abgeſtumpft. Die Linien de, ag, ce, gb ſind alſo Höhenlinien der gleichſeitigen Grund△e der abgeſtumpften Würfelecken. Dieſe Höhenlinien ſchneiden ſich in i und h und hälften ſich, wie leicht zu erweiſen.

Es ſind nun die 4 Abſtumpfungsflächen der Würfelecken als 4 für ſich ausgebildete Flächen des eingeſchriebenen 8flachs zu betrachten, deſſen Axe eg. ei, ig, gh und he ſind 4 in einer Ebene liegende Höhenlinien der 4 Flächen, h und i Kantenmitten dieſes 8flachs.

Aus Betrachtung der 8ten Figur ergiebt ſich nun:

1. Da wir (Fig. 1.) den Winkel aec (= bed, dgb, agc) zu 55° fanden, ſo iſt der Winkel ced = agb = 180° — (2 × 55°) = 70°. Das heißt: 2 an einer Ecke einander gegenüber liegende Flächen des 8flachs bilden Winkel von 70°.

2. ehgi eine gleichſeitige Raute, daher der Winkel ehg = eig jeder = 180° — 70° = 110°. Das

4) Dies Geviert iſt dem des Mittelkryſtalls (der Fläche) gleich.

iſt: der Kantenwinkel des 8flachs iſt 110°.

3. △ bie von 70°, 55° und 55°, alſo gleichſchenklig. bi = ie. Die Linie bn iſt ſenkrecht auf ei. △ bni von 90° 70° 20°. In einem ſolchen iſt, wie wir bei näherer Betrachtung des 4flachs ſehn werden, die Hypotenuſe bi 3 mal ſo groß als die Kathete ni, welche dem Winkel von 20° gegenüber liegt. Iſt ni ⅓ bi, ſo iſt es auch ⅓ ei (= bi), die Höhenlinie des 8flach △s iſt alſo in n ſo getheilt, daß ⅔ nach der 8flach Ecke e, ⅓ nach der Kantenmitte i zu liegt. n iſt daher Mittelpunkt des 8flach △s. Eben ſo k, m, l. Die Winkel um k, l, m, n ſind rechte. kl und mn ſind alſo ſenkrechte Linien von der Mitte eines 8flach △s auf die Mitte des #en △s, mithin Flächenaxen des eingeſchriebenen 8flachs. Sie ſind aber auch Theile der Axen des umſchriebenen Würfels. Da wir ak = ld = ⅓ der Axe ad fanden, ſo folgt daß kl (= nm) die Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs ⅓ der (Eck) Axe des umſchriebenen Würfels iſt. Auch folgt daß ſich die Flächenaxen des 8flachs wie die Axen des Würfels unter 110° und 70° ſchneiden. Die Winkel von 110° liegen den Ecken des 8flachs zu — wie beim Würfel den entſprechenden Flächen — die Winkel von 70° den Kanten des 8flachs — wie beim Würfel den entſprechenden Kanten.

Daß ſich die Flächenaxen des 8flachs zugleich in f hälften, iſt aus Vergleichung mit den in f ſich hälftenden Würfelaxen, deren Ueberbleibſel ſie ſind, klar.

4. Zieht man die 8flach Axe eg, ſo erhält man 2 gleiche und ähnliche gleichſchenklige △e eig und bid. Daher fi die Höhe des einen = io der Höhe des 2ten. Eben ſo iſt hp = hf. Es iſt alſo die Kantenaxe des umſchriebenen Würfels $1\frac{2}{2}$ 5) der Kantenaxe des eingeſchriebenen 8flachs. Dies ergiebt ſich ſchon aus dem früher Geſagten. Die Kantenaxe des Würfels iſt = ſeiner Gere, die Kantenaxe des 8flachs = ſeiner Kante. Da die Kanten des eingeſchriebenen 8flachs aber = $\frac{1}{2}$ der Gere des umſchriebenen Würfels, ſo iſt ſie auch $\frac{1}{2}$ von deſſen Kantenaxe.

B. Das umſchriebene 8flach.

Stumpft man die 6 Ecken des 8flachs ab, und zwar bis in die Mitte der Kanten, ſo entſteht der Mittelkryſtall zwiſchen dem Achtflach A und dem Würfel Z. Jedes von deſſen △en iſt $\frac{1}{4}$ des 8flach △es. Schneidet man # den Abſtumpfungsflächen weiter, bis je 3 in der Mitte eines 8flach △s eine 3kantige Ecke bilden, ſo entſteht ein Würfel.

Die Geſtalten ſind dieſelben wie in der vorigen Folge, die Folge ſelbſt aber iſt umgekehrt, indem jetzt

Vom

5) $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{9}{12}$ ꝛc. d. i. 2 Hälften, 4 Sechstheile, 9 Zwölftheile werde ich ſo als gegebene einzelne Theile immer von 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ unterſcheiden.

vom Achtflach A aus verkleinernd zum Würfel Z fortgeſchritten wird.

Bilden wir dieſen Würfel in das hohle 8flach A ein. Seine 8 Ecken fallen in die △ Mitten des 8flachs, ſeine Axen ſind alſo eins mit den Flächenaxen des 8flachs. Die Kante des Würfels, welche 2 Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs # deſſen Axe verbindet, iſt $\frac{1}{3}$ der Axe dieſes 8flachs; die Gere welche 2 Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs rechtwinklig durch die Axe verbindet, iſt $\frac{2}{3}$ der 8flachkante [6]). Vergleiche Fig. 4 und 5. Es wird daher die Axe etwa 2er waagrechter Kanten des umſchriebenen 8flachs (= einer 8flachkante) über die ihr entſprechende Axe 2er ſenkrechten Kanten des eingeſchriebenen Würfels (= einer Würfelgere) an jeder Seite um $\frac{1}{6}$ der 8flachkante ſelbſt, hinausragen.

C: Fig. 9. Durchſchnittsebene EFGH durch 4 in Fig.9
einer Ebene liegende Höhenlinien des 8flachs, die wir künftig vorzugsweiſe den 8flachdurchſchnitt nennen wollen. In dieſen Durchſchnitt iſt das Würfelrechteck ABCD des dem 8flach eingeſchriebenen Würfels verzeichnet, in dieſes Rechteck iſt ein 2ter 8flachs Durchſchnitt efgh, in dieſen Durchſchnitt ein zweites Würfelrechteck abcd eingeſchrieben.

Der 8flachsdurchſchnitt kann ſo verzeichnet werden. Mache fh = der Kante BD, eg = der halben Gere AB deſſelben Würfels. Ziehe beide ſo, daß ſie

6) Euclid Buch 15, Satz 4. „In ein gegebenes Oktaeder einen Würfel zu beſchreiben“ iſt in der Ausgabe von Lorenz und Mollweide unrichtig gelößt, richtig in der des Clavius.

ſich rechtwinklig in einem Punkte n kreuzen und hälften, und verbinde ihre Höhenlinien efgh.

Es iſt ein Würfel ABCD um einer abcd in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Kante des letzteren bd iſt $\frac{1}{3}$ der Axe fh des 8flachs, welche = BD, der Kante des umſchriebenen Würfels. Die Kante des eingeſchriebenen Würfels iſt mithin $\frac{1}{3}$ der Kante des umſchriebenen.

$\triangle$ CFD $\sim$ $\triangle$ afb. Daher

ab : CD = fb : FD = fa : FC = 1 : 3.

Die Gere des eingeſchriebenen Würfels iſt $\frac{1}{3}$ der Gere des umſchriebenen.

Fig. 8 fanden wir cb = $\frac{1}{3}$ CB.

Die Axe des eingeſchriebenen Würfels iſt $\frac{1}{3}$ der Axe des umſchriebenen.

Sonach iſt jede Linie des eingeſchriebenen Würfels $\frac{1}{3}$ der gleichartigen Linie des umſchriebenen Würfels.

Iſt aber die Kante des umſchriebenen Würfels das 3fache der Kante des eingeſchriebenen, ſo iſt die Fläche des umſchriebenen das 9fache der Fläche des eingeſchriebenen, der Körper des umſchriebenen das 27fache des eingeſchriebenen.

Es iſt ein 8flach um ein 8flach in denſelben Würfel beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Fig. 9. Die Axe FH des umſchriebenen iſt das 3fache der Kante BD des ihm eingeſchriebenen Würfels, mithin das 3fache der Axe fh des eingeſchriebenen 8flachs, welche der Würfelkante BD gleich.

Eben ſo iſt, wie wir ſahen, die Flächenaxe CB des umſchriebenen 8flachs das 3fache der Flächenaxe cb des eingeſchriebenen.

Die Kantenaxe EG (oder Kante) des umſchriebenen iſt das 3fache der Kantenaxe eg (oder Kante) des eingeſchriebenen, wie ſich leicht beweiſen läßt, und die Figur zeigt.

Sonach iſt jede Linie des umſchriebenen 8flachs das 3fache jeder gleichartigen Linie des eingeſchriebenen 8flachs.

§ 9.

2) Würfel und Rauten12flach.

A. Der umſchriebene Würfel.

Stumpft man die Kanten eines Würfels ab, ſo erhält man einen Körper von 6 Gevierten — den Würfelflächen—und 12 6ſeitigen Abſtumpfungsflächen. Stumpft man ſo weit ab, daß die Gevierte ſchwinden, indem je 4 Abſtumpfungsflächen in der Mitte einer Würfelfläche eine 4kantige Ecke bilden, ſo erhält man ein Rauten12flach. Die 6 4kantigen Ecken dieſes 12flachs Z, entſprechen alſo den Flächenmitten des Würfels A, berühren dieſe Mitten, wenn man das 12flach in den hohlen Würfel A einbildet. Die 3 Axen dieſer Ecken ſind eins mit den 3 Flächenaxen des umſchriebenen Würfels, kreuzen ſich wie dieſe unter rechten Winkeln, und ſind wie dieſe der Kante des Würfels A gleich. — Die langen Geren

der 12flachs Rauten ſind = den Linien, welche von einer Flächenmitte des umſchriebenen Würfels zur benachbarten Flächenmitte gezogen werden, alſo = der halben Gere jenes Würfels.

Fig. 10 Fig. 10. abcd ein Geviert entblößt durch einen Schnitt rechtwinklich durch die Mitte 4 ‡er Würfelkanten. fg, gh, he, ef würden 4 lange Geren des eingeſchriebenen Rauten12flachs ſeyn. Die Figur zeigt wie je 2 unter rechtem Winkel zuſammenſtoßen, 4 aber ein Geviert bilden. 3 mal 4 lange 12flachs Geren bilden alſo 3 Gevierte, die ſich — wie die 3 4kantigen Axen, die Geren dieſer Gevierte — unter rechten Winkeln ſchneiden. Sie verhalten ſich demnach ganz wie die Kanten des 8flachs. (Fig 7.)

B. Der eingeſchriebene Würfel.

Stumpft man die 6 4kantigen Ecken des Rauten12flachs ab, und fährt damit fort, bis jeder der 6 Schnitte durch 4 kurze Grundgeren der abgeſtumpften Ecke geht, ſo erhält man einen Würfel.

Bildet man dieſen Würfel Z in das hohle 12flach A ein, ſo treffen ſeine Ecken mit den 8 3kantigen Ecken, ſeine Kanten mit den 12 kurzen Geren des 12flachs zuſammen. Je 4 in einer Ebene liegende kurze Geren bilden alſo ein Würfelgeviert. — Eine Linie aus der Mitte einer kurzen Gere rechtwinklich durch die 4kantige Axe zur Mitte der ‡en Gere, entſpricht der Linie, welche die Mitte 2er ‡en Würfelkanten derſelben Fläche verbindet. Wie dieſe = der Würfelkante, ſo iſt jene Linie = der kurzen Gere des 12flachs.

Die Linie von einer 3kantigen Ecke rechtwinklich durch die 4kantige Axe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke des 12flachs iſt = der Gere des Würfels = der langen Rautengere des 12flachs.

Fig. 11. Die bezeichnete Linie ab verbindet 2 En- Fig. 11
den a und b zweier gleichen #en Kanten ac und bd, deren zwei entgegengeſetzte Enden c und d durch die lange Gere verbunden werden. ab iſt daher # und = der langen Gere cd und wie dieſe = der Flächenaxe des 12flachs.

Eine Linie von einer Rautenmitte zur Mitte der benachbarten mit ihr eine Kante bildenden Raute, iſt = der Linie, welche 2 gehälftete an einander ſtoßende Seiten eines Gevierts des eingeſchriebenen Würfels verbindet, mithin = der halben Würfelgere = der halben langen Rautengere = der halben Flächenaxe des Rauten-12flachs.

Die 4 Axen des eingeſchriebenen Würfels ſind eins mit den 4 3kantigen Axen des umſchriebenen 12flachs. Letztere kreuzen und hälften ſich mithin auch unter 110° und 70°, und zwar ſo, daß die Winkel von 110° den 6 4kantigen Ecken — welche den Würfelflächen entſprechen — die von 70° den kurzen Geren — welche den Würfelkanten entſprechen — zu liegen.

Fig. 12. adef Raute des 12flachs. — Fig. 12

ac und cb ſeyen die Kanten, ab die Gere eines Würfels. Mache ce = ac und cd = cf = ab. Ziehe ad, de, ef, af, ſo entſteht die Raute adef, deren kurze Gere ae = 2en Kanten ac, die lange Gere df = 2 Geren deſſelben Würfels, deren 2 Geren alſo in dem — nur

verdoppelten — Verhältniſſe der 2 Geren einer Raute des 12flachs ſtehen, daher ſie eine ſolche Raute vorſtellt.

Ginge man von einem Würfel aus, deſſen Kante ab (und be) deſſen Gere ae, ſo würde in der Raute adef die kurze Gere ae = der Gere, die lange df = 2 Kanten deſſelben Würfels ſeyn. Die Raute adef wäre daher der Raute efgh Fig. 9 ähnlich, deren lange Gere hf = 1 Kante, die kurze Gere eg aber = ½ Gere deſſelben Würfels iſt. Da nun letztere Raute von 110° und 70°, ſo ergiebt ſich hieraus ſchon, daß gegenwärtige Raute denſelben Winkel habe, was ich weiter unten beſtätigen werde. —

Da die Rautenmitten mit den Kantenmitten des eingeſchriebenen Würfels gleich ſind, ſo ſchneiden ſich je 2 Rautenaxen des 12flachs wie je 2 Kantenaxen des Würfels unter rechten Winkeln.

Bey der Umgeſtaltung des 12flachs in einen Würfel wurden, wie wir ſahen, 6 4kantige Pyramiden, jede durch 4 kurze Geren des 12flachs weggeſchnitten. Ihre Grundflächen ſind Flächen des eingeſchriebenen Würfels. Setzt man 2 auf 2 benachbarte Würfelflächen, ſo müſſen ihre 2 in der Würfelkante zuſammengränzenden Flächen Eine Fläche bilden. Jede der beiden Pyramidengrundkanten muß daher 45° beide 90° und mit der Würfelkante 180° ſeyn.

Fig. 13 Fig. 13. Durchſchnitt des 12flachs durch 4 lange Geren. Die Mitten der Geren fallen mit den Mitten 4 #er Kanten des eingeſchriebenen Würfels zuſammen. eb und bf, fc und cg ꝛc. ſind △s Höhenlinien der auf die

Würfelflächen aufgeſetzten Pyramiden. Es ergiebt ſich nun:

1. Daß, wie erwähnt, der Winkel bfi = cfg = 45° beide = 90°, verbunden mit dem Winkel der Würfelkante ifg = 180°.

2. Fälle bd die 4kantige Axe. Das △ bif iſt von 90° 45° 45°. Alſo bi = if. Ebenſo iſt dk = kg. bi iſt aber = kd da beide = einer halben Kante des eingeſchriebenen Würfels. Beide zuſammen ſind alſo gleich der ganzen Kante oder Flächenaxe ik des eingeſchriebenen Würfels. bd die 4kantige Axe iſt daher = 2 ik = dem Doppelten der Kante des eingeſchriebenen Würfels.

Sie iſt alſo auch doppelt ſo lang als die kurze Gere des 12flachs.

Aus dem früher Geſagten ergiebt ſichs, daß bei jeder der abgeſchnittenen 4 Pyramiden die △s Höhenlinie, welche = der halben langen Rautengere = iſt der halben Gere der Grundebene, des Grundgeviertes. —

Man denke ſich den eingeſchriebenen Würfel aus 6 4ſeitigen Pyramiden zuſammengeſetzt, deren Grundflächen die Würfelflächen, deren Spitzen im Mittelpunkt des Würfels liegen, deren Höhe daher = der halben Würfelkante. Ihre Grundkantenwinkel ſind = 45°, da ſie gehälftete Würfelkantenwinkel. Ihre △s Höhenlinien, von einer Würfelkantenmitte zum Würfelmittelpunkt ſind = den halben Würfelgeren, alſo = den halben langen Rautengeren des umſchriebenen 12flachs. Dieſe Pyramiden ſind alſo denen völlig gleich, welche auf die 6 Würfelflä-

chen aufgeſetzt werden müſſen, um ein Rauten12flach zu bilden. Dies erſcheint daher als ein Würfel, dem 6 4ſeitige Pyramiden, aus welcher ein 2ter ihm gleicher Würfel beſteht, aufgeſetzt ſind. Der körperliche Inhalt des ſo entſtandenen Rauten12flachs iſt demnach doppelt ſo groß als der des ihm eingeſchriebenen Würfels. —

Betrachten wir 2 jener Pyramiden, aus denen der Würfel zuſammengeſetzt iſt, deren Grundflächen 2 #e Würfelflächen. Es werden immer 2 in einer Richtung liegende Pyramidenkanten beider Pyramiden zuſammen Eine Würfelaxe bilden. Hieraus folgt, daß die Kante des Rauten12flachs, welche der Kante einer ſolchen Würfelpyramide gleich, ebenfalls halb ſo groß als eine Axe des eingeſchriebenen Würfels, oder als die 3kantige Axe des Rauten12flachs ſelbſt iſt.

Die kurze Rautengere iſt länger als die Kante. Wäre ſie ihr gleich, ſo betrüge der ſtumpfe Rautenwinkel 120°, was unmöglich, weil dann 3 um die 3kantige Ecke liegende gleiche Winkel = 360° = 4 Rechten wären, und keine Ecke bilden würden. Wäre die Gere kürzer als die Kante, ſo würde der ſtumpfe Rautenwinkel größer als 120° seyn. Iſt aber die kurze Rautengere länger als die Kante, ſo iſt ihr Doppeltes — die 4kantige Axe — auch länger als die verdoppelte Kante, als die 3kantige Axe.

Fig. 14 Fig. 14. Durchſchnittsfläche eines Rauten12flachs. Der Schnitt geht durch 2 #e kurze Geren und 2 Paar #e Kanten [7]).

7) Vorläufig hier die leichteſte Weiſe, den Durchſchnitt zu verzeichnen. Man entwerfe die Raute Fig. 12, hälfte ihre Seiten,

$\triangle$ abc $\cong$ $\triangle$ agc.

ac = ac
ab = gc
bc = ag } da die 12flachskanten = den halben 3kantigen Axen.

Daher Winkel abc = agc = 110°.

Es iſt alſo der Winkel, den 2 an derſelben 4kantigen Ecke des 12flachs einander gegenüber liegenden 12flachs Kanten bilden, gleich dem größern Winkel, den 2 3kantige ſich kreutzende Axen machen = 110°.

Da die verglichenen $\triangle$e gleichſchenklig ſind — weil alle Kanten und alle halben 3kantigen Axen unter ſich gleich — ſo ſind die 2 und 2 Winkel an der gemeinſamen Grundlinie ac von 35°. Es iſt nun

1. Der Winkel bcf den die Kante mit der 3kantigen Axe macht = 2en Winkeln von 35° = 70°.
2. Der Winkel dcf, den die kurze Gere mit der 3kantigen Axe bildet, iſt ganz derſelbe, den die Kante des eingeſchriebenen Würfels mit der Würfelaxe macht, und daher = 55°.
3. Der Winckel bcd, den die Kante des Rauten12flachs mit der kurzen Gere macht, iſt die Summe der 2 vorigen = 70° + 55° = 125°.

Fig. 15. 3 um eine 3kantige Ecke liegende Flächen des Rauten12flachs. Fig. 15

* und verbinde die Hälftpunkte durch Linien welche der kurzen Gere #. Letztere Linien werden den kurzen Geren des Durchſchnitts Fig. 14. entſprechen, die 4 halben Rautenſeiten aber den Kanten dieſes Durchſchnitts. Unter: „Durchſchnitt eines Rauten12flachs" ohne weitern Zuſatz, werde ich forthin immer den von Fig. 14. verſtehn.

Wir fanden den Winkel $abc = 110^\circ$.

Da nun $ab \parallel ed$, $bc \parallel df$, ſo iſt Winkel $edf = abc = 110^\circ$. Der ſtumpfe Winkel der 12flachsraute iſt 110°, der ſpitze alſo 70°.

Fig. 16 Fig. 16. Durchſchnitt des Rauten12flachs wie Fig. 14.

1. Ziehe von c die Linie ci ſenkrecht auf be und verlängere ſie bis k.

   In $\triangle$ cbi ſind die Winkel 90° 70° 20°, daher $bi = \frac{1}{3} bc$. Da nun die Kante $bc =$ der halben 3kantigen Axe be, ſo iſt $bi = \frac{1}{6} be$.

   Wird fo ganz wie ck gezogen, ſo iſt $pe = \frac{1}{6} be = bi$.

2. Ziehe von der 3kantigen Ecke a die Linie ahl ſenkrecht auf be und cd, daher $\parallel$ kic und $\parallel$ fpo.

   Ziehe dmn wie ahl, dieſem $\parallel$.

   $\triangle abh \cong \triangle dme$ (1 Seite 3 Winkel) daher $bh = me$ und $cb = cd = mi$, da cimd ein Rechteck.

   Da nun $be = 2\ cd$, ſo iſt $be - mi = cd = bi + me = bi + bh$.

   Da aber $bi = \frac{1}{3} bc = \frac{1}{3} cd$, ſo iſt $bh = \frac{2}{3} cd = \frac{2}{6} be$. g hälftet be, daher iſt $bi = ih = hg = \frac{1}{6} be$. Eben ſo iſt $gm = mp = pe = \frac{1}{6} be$.

3. $\triangle bki \sim \triangle bah$, da $ki \parallel ah$. Alſo $bk : ba = bi : bh = 1 : 2$. Alſo $ak = kb$.

4. ihcl iſt ein Rechteck, alſo $ih = cl = \frac{1}{6} be$, alſo $= \frac{1}{3} cd$.

Aus 1. 2. 3. 4. folgt:

Zieht man aus einer 4kantigen Ecke des Rauten-12flachs eine Linie rechtwinklig durch die 3kantige Axe auf die gegenüber liegende Fläche, ſo ſchneidet dieſe Linie $\frac{1}{6}$ der 3kantigen Axe ab und trifft die Mitte der gegenüber liegenden Fläche.

Zieht man von einer 3kantigen Ecke rechtwinklig durch dieſelbe 3kantige Axe eine Linie ſenkrecht auf die gegenüber liegende Kante, ſo ſchneidet dieſe Linie $\frac{2}{6}$ der Axe uud $\frac{2}{6}$ der beſagten Kante ab.

2 Linien der erſten, 2 der andern Art durch dieſelbe ſenkrechte 3kantige Axe oben und unten gezogen, theilen dieſelbe in 2 und 2 nach beiden Polen gelegene 6 Theile und ein in der Mitte liegendes Dreitheil. Nimmt man den Mittelpunkt der Axe als Theilungspunkt hinzu, ſo zerfällt dieſelbe in 6 gleiche Theile.

Fig. 17. Raute des Rauten12flachs. Ziehe af ſenkrecht auf die Kante bc, ce ſenkrecht auf ad. Das △ abf iſt von 90°, 70°, der dritte Winkel iſt alſo 20°. bf welches dem Winkel von 20° gegenüber liegt, iſt daher $\frac{1}{3}$ der Hypotenuſe ab. Da ab = bc, ſo iſt bf = $\frac{1}{3}$ bc. Eben ſo iſt ed = $\frac{1}{3}$ ad. Fig. 17

Man halte das Rauten12flach ſenkrecht zwiſchen einer ſenkrechten 3kantigen Axe. Man ſchneide die obern und untern 3kantigen Polecken durch je 3 an ihre kurzen Geren grenzenden 3kantigen Ecken ſo weg, daß die obere Schnittebene durch 6 Linien wie af, die untere durch 6 Linien wie ce geht. Beide Schnitte ſchneiden rechtwinklig durch die 6 ſenkrechten Kanten, daher auch rechtwinklig durch die ihnen #e ſenkrechte 3kantige Axe, und verkürzen, (wie ſich aus Fig. 16. ergiebt) dieſe Axen an

beiden Enden um $\frac{1}{3}$ und jede Kante ebenfalls um $\frac{1}{3}$. Man erhält ſo eine regelmäßige 6ſeitige Säule, deren Höhe $\frac{1}{3}$ der 3kantigen Axe des urſprünglichen Rauten12flachs iſt. Ihre Säulenkanten (Fig. 17. ae und fc) ſind $\frac{2}{3}$ der urſprünglichen Kanten.

Hälftet man dieſe Säulen-Kanten, und ſchneidet rechtwinklig durch ihre Hälftpunkte und zugleich durch die Axe der Säule — und durch die urſprüngliche 3kantige Axe des 12flachs — ſo hälftet dieſer Schnitt die Säule wie das 12flach.- Daß die angegebenen Hälftpunkte die Kanten des Rauten12flachs ſo zertheilen, daß $\frac{1}{3}$ nach der 3kantigen, $\frac{2}{3}$ nach der 4kantigen Grenzecke jeder zertheilten Kante zu liegen, iſt klar.

C. a. Es ſey ein Würfel um, einer in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Fig. 18 Fig. 18. ABCDEF und abcdef Durchſchnitte 2er 12flache, ACDF und acdf Würfelrechtecke.

1. Wir wiſſen daß pn oder cd = $\frac{1}{2}$ be, daß die Kante des eingeſchriebenen Würfels $\frac{1}{2}$ der 4kantigen Axe des ihm umſchriebenen 12flachs. be = CD. Dieſe Axe iſt aber = der Kante des umſchriebenen Würfels. Alſo iſt die Kante des umſchriebenen Würfels = 2en Kanten des eingeſchriebenen.

2. Wir wiſſen daß be = CD = $\frac{1}{2}$ BE. Hiernach und nach 1 iſt BE eingetheilt.

$\triangle$ Foe $\sim$ $\triangle$ fon da ſie gleichwinklig.

Fo : fo = oe : on = 2 : 1 daher

fo = $\frac{1}{2}$ Fo. Eben ſo iſt

co = ½ Co. Daher

fo + co = ½ Fo + Co. Alſo fc = ½ FC.

Die Axe des umſchriebenen Würfels iſt = 2 Axen des eingeſchriebenen.

3. △ Fo D ∾ △ fod, da ſie gleichwinklig.

Fd : fd = Fo : fo = 2 : 1.

Die Gere des umſchriebenen Würfels iſt = 2 Geren des eingeſchriebenen.

4. Iſt die Kante des umſchriebenen Würfels = 2en Kanten des eingeſchriebenen, ſo iſt das Geviert des umſchriebenen 4 mal, der Körper 8 mal ſo groß als des eingeſchriebenen.

b. Es ſey ein Rauten12flach um, eines in denſelben Würfel beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

1. Wir wiſſen, daß die 4kantige Axe des 12flachs BE = 2en Kanten des ihm eingeſchriebenen Würfels = 2 CD. Die 4kantige Axe be des eingeſchriebenen 12flachs, b iſt aber = CD. Alſo iſt die 4kantige Axe des umſchriebenen 12flachs = 2en 4kantigen Axen des eingeſchriebenen.

2. Wir wiſſen daß FC = 2 fc. Die 3kantige Axe des umſchriebenen 12flachs iſt = 2en 3kantigen Axen des eingeſchriebenen.

3. Wir wiſſen daß CD = 2 cd. Die kurze Gere des umſchriebenen 12flachs iſt = 2en kurzen Geren des eingeſchriebenen.

4. Wir wiſſen daß FD = 2 fd d. i. die der langen Rautengere entſprechende Linie des um-

ſchriebenen 12flachs — von einer 3kantigen Ecke rechtwinklich durch die 4kantige Axe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke — iſt = 2 ähnlichen Linien des eingeſchriebenen.

5. Daß die Kante BC des umſchriebenen 12flachs = 2 bc = 2en Kanten des eingeſchriebenen findet man durch Vergleichung der ähnlichen △e BoC und boc.

So ergiebt es ſich, daß von je 2 gleichartigen Linien des um- und des eingeſchriebenen Rauten12flachs und Würfels, die dem umſchriebenen Körper angehörige immer doppelt ſo groß iſt, als die des eingeſchriebenen.

Das 12flach be iſt ſeinem körperlichen Gehalt nach = 2 Würfeln ad.

Der Würfel AD = 8 Würfeln ad. Daher das 12flach BE = 16 Würfeln ad.

Das umſchriebene 12flach iſt alſo 8 mal ſo groß als das eingeſchriebene.

§. 10.

3) 8flach und Rauten12flach.

A. Das umſchriebene 8flach.

Stumpft man die 12 Kanten des 8flachs ab, ſo entſteht ein Körper von 8 △en und 12 6ecken. Schneidet man ⋕ der Abſtumpfungsflächen ſo weit, bis je 3 in der Mitte eines 8flach △s eine 3kantige Ecke bilden, ſo entſteht ein Rauten12flach.

Die 8 3kantigen Ecken des 12flachs, fallen daher in die Flächenmitten des 8flachs, die 3kantigen Axen in die Flächenaxen. Die Kante des 12flachs iſt = der halben Flächenaxe des 8flachs, da ſie der eigenen halben 3kantigen Axe gleich.

Die Linie, welche # der Axe 2 △s Mitten des 8flachs verbindet und $\frac{1}{3}$ der Axe iſt, entſpricht der kurzen Gere des 12flachs. Da dieſe Gere $\frac{1}{2}$ der 4kantigen Axe des 12flachs, ſo iſt dieſe Axe ſelbſt $\frac{2}{3}$ der Axe des umſchriebenen 8flachs, welche letztere daher durch die vollendete Kantenabſtumpfung an jedem Ende um $\frac{1}{6}$ verkürzt wird. — Die Linie von einer 3kantigen Ecke des 12flachs rechtwinklig durch die 4kantige Axe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke, welche Linie = der langen Rautengere = der Flächenaxe des 12flachs, entſpricht beim umſchriebenen 8flach die Linie welche 2 Flächenmitten rechtwinklig durch eine Axe verbindet. Wie dieſe iſt jene $\frac{2}{3}$ der Kante des 8flachs.

Beim 8flach mit abgeſtumpften Kanten ſind die Anfänge von je 6 12flachkanten unter ſich und mit einer Flächenaxe # weil dieſe Axe der 3kantigen Axe des 12flachs entſpricht. Jede ſolche Kante bildet mit 2 #en Flächen des 8flachs rechte Winkel.

B. Das eingeſchriebene 8flach.

Stumpfe ich die 8 3kantigen Ecken des 12flachs erſt ſchwach, zuletzt durch je 3 lange ein gleichſeitiges △ bildende Grundgeren ab, ſo entblöße ich 8 Flächen eines im 12flach liegenden 8flachs.

Die 6 4kantigen Ecken des 12flachs fallen mit den Ecken, ſeine 12 langen Geren mit den Kanten des ein=

geſchriebenen 8flachs zuſammen. Die kurze Gere des 12flachs iſt = der halben Axe des 8flachs. —

Betrachten wir dieſe Verwandlung umgekehrt ſo, daß wir auf jede Fläche des eingeſchriebenen 8flachs eine 3ſeitige Pyramide aufſetzen, deren Grundfläche = dem 8flach △. Die Grundkante dieſer Pyramide iſt 35°, weil 2 mal 35° + 120° (dem Kantenwinkel des 8flachs) = 180°, ſo daß je 2 Flächen 2er benachbarten Pyramiden die in einer 8flachkante zuſammentreffen, Eine Raute bilden. Wir ſahen daß die Axe einer ſolchen Pyramide $\frac{1}{3}$ der 12flachkante und $\frac{1}{6}$ der 3kantigen 12flachsaxe war. (Fig. 16. bi und pe). Da nun von jedem Ende der 3kantigen 12flachsaxe $\frac{1}{6}$ weggeſchnitten wird, ſo iſt die übrig bleibende Flächenaxe des 8flachs (ip Fig. 16) $\frac{2}{3}$ der verkürzten 3kantigen Axe. Umgekehrt ergiebt es ſich, daß die Axe jener 3ſeitigen, der Fläche des 8flachs aufzuſetzenden Pyramide $\frac{1}{4}$ der Flächenaxe des 8flachs betragen muß. (Fig. 16. bi = $\frac{1}{4}$ ip). Wir werden weiterhin ſehn, daß das 4flach als aus 4 ſolchen 3ſeitigen Pyramiden zuſammengeſetzt betrachtet werden kann, deren Grundflächen die Flächen des 4flachs, deren Spitzen im Mittelpunkt des 4flachs zuſammentreffen.

C. a. Beſchreibt man ein 8flach um, eins in daſſelbe Rauten12flach, wie verhalten ſich beide 8flache zu einander?

Die Axe des umſchriebenen 8flachs iſt = 3 kurzen Geren des eingeſchriebenen 12flachs, die Axe des eingeſchriebenen 12flachs = 2 ſolchen Geren (und = der 4kantigen 12flachs Axe). Alſo verhalten ſich beide 8flachsaxen = 3 : 2.

b. Es ſey ein Rauten12flach um, eins in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die 4kantige Axe des umſchriebenen 12flachs iſt = der Axe des eingeſchriebenen 8flachs, die des eingeſchriebenen 12flachs iſt = $\frac{2}{3}$ der Axe deſſelben 8flachs, alſo verhält ſich die 4kantige Axe des umſchriebenen 12flachs zu der des eingeſchriebenen = 3 : 2.

Fig. 19. Zum Veranſchauligen des Geſagten und zur nähern Ausführung diene Fig. 19. ABCDEF, abcdef 2 Durchſchnitte von Rauten12flachen, BGEH, bgeh, Durchſchnitte von 8flachen durch 4 in einer Ebene liegende Höhenlinien. Fig. 19

1. cd iſt Linie zwiſchen 2 △mitten des 8flachs BE und zugleich kurze Gere des Rauten12flachs be. Es iſt bekannt daß

   EB = 3 cd
   eb = 2 cd

   eb = $\frac{2}{3}$ EB

   die Axe eb des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{2}{3}$ der Axe des umſchriebenen EB. Hiernach iſt EB eingetheilt.

2. △ BoH ∾ △ boh, da ſie gleichwinklig.

   Ho : ho = Bo : bo = 3 : 2. Eben ſo Go : go = 3 : 2.

   Alſo gh = $\frac{2}{3}$ GH. Die Kantenaxe und Kante des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{2}{3}$ der Kante des umſchriebenen.

3. Nach 2 iſt auch
BH : bh = Bo : bo = 3 : 2. Alſo bh = $\frac{2}{3}$ BH.
Die Höhenlinie des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{2}{3}$ der Höhenlinie des umſchriebenen.

4. △ Boc ∾ △ bok, da ſie gleichwinklig.
oc : ok = Bo : bo = 3 : 2. Eben ſo fo : io = 3 : 2.
Alſo ik = $\frac{2}{3}$ fc.
Die Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{2}{3}$ der des umſchriebenen.

So verhalten ſich alle gleichartigen Linien beider 8flache wie 2 : 3.

Leicht läßt ſich das Gefundene auf das Verhältniß des um- und eingeſchriebenen Rauten12flachs anwenden.

1. eb = $\frac{2}{3}$ EB. Die 4kantige Axe des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{2}{3}$ der des umſchriebenen.
2. gh = $\frac{2}{3}$ GH. Die Flächenaxe und lange Gere des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{2}{3}$ der des umſchriebenen.
3. cd = $\frac{2}{3}$ CD. Die kurze Gere des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{2}{3}$ der des umſchriebenen. Dies ergiebt ſich aus Vergleichung der ähnlichen △e DoC und doc.
4. cf = $\frac{2}{3}$ CF. Die 3kantige Axe des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{2}{3}$ der des umſchriebenen. Dies ergiebt ſich daraus daß wir wiſſen Ff = Cc iſt $\frac{1}{6}$ FC.

Und ſo verhalten ſich je 2 gleichartige Linien des ein- u. umgeſchriebenen 12flachs wie 2 : 3.

D. Ein Würfel und ein 8flach ſind um daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Kante des Würfels iſt $\frac{2}{3}$ der Axe des 8flachs. Denn ſie iſt = der 4kantigen Axe des 12flachs, = 2 kurzen Geren des 12flachs, die kurze Gere aber iſt = $\frac{1}{3}$ der 8flach Axe.

Ein Würfel und ein 8flach ſind in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Axe des 8flachs (= der 4kantigen 12flachsaxe) iſt das Doppelte von der Kante des Würfels (= der kurzen Rautengere). Die Gere des Würfels, da ſie = der langen Rautengere, iſt der 8flachkante gleich.

Beſchreibt man einen Würfel um, ein 8flach in daſſelbe Rauten12flach, ſo verhält ſich der Würfel zum 8flach wie ein dem 8flach unmittelbar umſchriebener Würfel. Beſchreibt man ein 8flach um, einen Würfel in daſſelbe Rauten12flach, ſo verhält ſich das 8flach zum Würfel, wie das dem Würfel unmittelbar umſchriebene 8flach.

Fig. 20. Zum Veranſchauligen und zur nähern Ausführung des Geſagten diene Fig. 20. Fig. 20

Um denſelben Durchſchnitt des Rauten12flachs afbdhc iſt der Würfel ABCD das 8flach FGHE, in denſelben Durchſchnitt der Würfel abcd, das 8flach fghe beſchrieben. Alle Linieneintheilungen und Winkelangaben ergeben ſich aus dem Früheren.

1. Die Zeichnung zeigt wie das eingeſchriebene 8flach fghe zugleich dem umſchriebenen Würfel ABCD eingeſchrieben ſey — dann wie der eingeſchriebene Würfel abcd zugleich dem umſchriebenen 8flach FGHE eingeſchrieben ſey. Hier treten alſo ganz die Verhältniſſe ein, welche wir bei Betrachtung der Verwandtſchaft von Würfel und 8flach gefunden haben.

2. EG = $\frac{6}{8}$ nq = $\frac{6}{8}$ AB.
Die Kantenaxe oder Kante des umſchriebenen 8flachs iſt $\frac{3}{4}$ der Gere des umſchriebenen Würfels.

3. eg = ab. Die Kante des eingeſchriebenen 8flachs iſt = der Gere des eingeſchriebenen Würfels.

4. hf = BD
hf = $\frac{2}{3}$ HF

BD = $\frac{2}{3}$ HF
Die Kante des umſchriebenen Würfels iſt $\frac{2}{3}$ der Axe des umſchriebenen 8flachs.

5. bd = $\frac{1}{2}$ fh. Die Kante des eingeſchriebenen Würfels iſt $\frac{1}{2}$ der Axe des eingeſchriebenen 8flachs.

6. bc = $\frac{1}{2}$ BC. Die Flächenaxe des umſchriebenen 8flachs iſt $\frac{1}{2}$ der Axe des umſchriebenen Würfels.

7. st = $\frac{2}{3}$ bc. Die Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{2}{3}$ der Axe des eingeſchriebenen Würfels.

Es ergiebt ſich, daß ſich das umſchriebene 8flach anders zum umſchriebenen Würfel verhält, als das eingeſchriebene 8flach zum eingeſchriebenen Würfel.

§. 11.

4) Rauten12flach und Leuzit.

A. Das umſchriebene Rauten12flach.

Stumpft man die 24 Kanten des Rauten12flachs ab, ſo erhält man zuerſt einen Körper von 12 Rauten und 24 6ſeitigen Abſtumpfungsflächen. Fährt man mit dem Abſtumpfen fort, bis je 4 Abſtumpfungsflächen in einer Rautenmitte eine 4kantige Ecke bilden, ſo entſteht der in das 12flach beſchriebene Leuzit.

12 ungleich 4kantige Ecken entſprechen alſo den Rautenmitten des 12flachs, 6 Axen welche dieſelben verbinden, den Flächenaxen des 12flachs. Dieſe ſind alſo = den langen Geeren des 12flachs.

Die lange Leuzitgere zwiſchen je 2 der 12 4kantigen Ecken iſt = der Linie von der Mitte einer Raute des 12flachs zur Mitte der benachbarten mit ihr eine Kante bildenden Raute = der halben Linie von einer 3kantigen 12flachs Ecke rechtwinklig durch die 4kantige Axe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke = der halben langen Gere des 12flachs. Die lange Leuzitgere iſt alſo die Hälfte einer der 6 4kantigen Axen.

Die Linie von einer der 12 ungleichkantigen Leuzit-Ecken rechtwinklig durch eine Hauptaxe zur gegenüber liegenden ungleichkantigen Ecke, entſpricht der Linie von

einer Rautenmitte des 12flachs rechtwinklig durch die 4kantige Axe zur Mitte der gegenüber liegenden Raute, iſt alſo = der kurzen Gere des umſchriebenen 12flachs = der halben 4kantigen Axe deſſelben. Verdoppelt man alſo die angegebene Leuzitlinie, ſo erhält man die 4kantige Axe des umſchriebenen 12flachs, auf welcher, als auf einer Hypotenuſe, 2 der 6 4kantigen Leuzitaxen ein gleichſchenkliges rechtwinkliges △ bilden würden.

B. Das eingeſchriebene Rauten12flach.

Stumpft man die 12 ungleichkantigen Leuzitecken zuerſt ſchwach, zuletzt ſo ſtark ab, daß jeder Schnitt durch 4 Grundgeren einer ſolchen Ecke geht, ſo erhält man eine Körperfolge, der vorigen (von A.) ähnlich, nur daß dieſe zweite nicht vom 12flach, ſondern umgekehrt vom Leuzit aus geht, und durch die letzten Schnitte das in demſelben ruhende 12flach entblößt.

Die Punkte der 6 Hauptleuzitecken bleiben, und entſprechen den 6 4kantigen Ecken des eingeſchriebenen 12flachs, 3 Hauptleuzitaxen daher den 3 4kantigen Axen, 12 Linien, deren jede 2 benachbarte Hauptleuzitecken verbindet, den langen Geren deſſelben 12flachs.

Die Punkte der 3kantigen Leuzitecken bleiben ebenfalls bei der Umgeſtaltung und entſprechen den Punkten der 3kantigen Ecken des eingeſchriebenen 12flachs, 4 3kantige Leuzitaxen daher deſſen 3kantigen Axen.

12 Linien, deren jede 2 3kantige Leuzitecken rechtwinklig durch eine der 6 4kantigen Axen oder # einer Hauptaxe verbindet, treffen in die kurzen Geren des 12-

flachs. Da die kurze Gere des 12flachs die Hälfte ſeiner 4kantigen Axe, ſo iſt auch jede der angegebenen Leuzitlinien die Hälfte einer Hauptleuzitaxe, die ja ſelbſt einer 4kantigen 12flachsaxe gleich.

Halte den Leuzit zwiſchen einer ſenkrechten Hauptaxe. Ein Schnitt durch 4 obere, einer durch 4 untere 3kantige Ecken rechtwinklig durch die Axe, ſchneidet, wie ſich aus Vergleichung mit den ähnlichen Schnitten beim 12flach ergiebt, $\frac{2}{4}$ der Hauptaxe weg. Ein 3ter Schnitt durch die waagrechte gemeinſchaftliche Grundfläche, vereint mit den vorigen, 4theilt die Axe.

Die Linie von einer 3kantigen Leuzitecke # einer ungleich 4kantigen Axe und rechtwinklig durch eine Hauptaxe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke, entſpricht beim eingeſchriebenen 12flach der Linie von einer 3kantigen Ecke rechtwinklig durch eine 4kantige Axe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke. Da dieſe = der langen 12flachs Gere, die Linie zwiſchen 2 benachbarten Hauptleuzitecken desgleichen, ſo iſt letztere Linie = der angegebenen Verbindungslinie zwiſchen zwei 3kantigen Ecken. —

Die 3kantige Axe des Leuzits fanden wir = der 3kantigen Axe des eingeſchriebenen 12flachs. 24 kürzere Leuzitgeren ſind = 24 Kanten deſſelben 12flachs. — Da die 12flachskante = der halben 3kantigen Axe, ſo iſt die kürzere Leuzitgere = der halben 3kantigen Leuzitaxe. —

Die Winkel unter welchen ſich 2 3kantige Leuzitaxen kreuzen ſind = den Winkeln unter welchen ſich 2 3kantige Axen des 12flachs kreuzen = 110° und 70°.

Die Winkel von 110° liegen den Hauptecken zu, die von 70° den ungleich 4kantigen Ecken. —

Der Winkel den 2 an einer Hauptecke gegenüber liegende kurze Geren bilden iſt = dem Winkel den 2 an einer 4kantigen 12flachsecke gegenüber liegende Kanten bilden = 110°.

Den Leuzit, welcher einem 12flach umſchrieben iſt, kann man aus dieſem ſo entſtehn laſſen, daß man auf jede 12flachsraute eine 4kantige Pyramide aufſetzt, deren Grundfläche = der Raute. Je 2 in einer 12flachskante zuſammenſtoßende Flächen 2er Pyramiden müſſen ein Leuzittrapez bilden. Da der Kantenwinkel des 12flachs = 120° ſo müſſen die 2 mit einer 12flachskante ſich einenden Pyramidenkanten 180° — 120° = 60°, jede daher 30° betragen. Die Höhenlinie jedes Pyramiden △s iſt = einer halben langen Leuzitgere, denn 2 Höhenlinien 2er Pyramiden △e die zuſammen ein Leuzittrapez bilden, vereinen ſich zu einer langen Leuzitgere.

Fig. 21 Fig. 21. Ein Durchſchnitt durch 2 einander in der ungleich 4kantigen Ecke gegenüber liegende Höhenlinien (oder 2 halbe Leuzitgeren) einer aufgeſetzten Leuzitpyramide. Wir fanden die Winkel bei a und c = 30°. Daher iſt der Winkel bei b = 120°. — Fälle die Axe bd der aufgeſetzten Pyramide ſenkrecht auf ac. bd iſt ein Theil der ungleich 4kantigen Leuzit-Axe. Im △ bdc von 90° 60° 30° iſt bc = 2 bd. Die Axe bd iſt alſo = $\frac{1}{2}$ der halben oder $\frac{1}{4}$ der ganzen längern Leuzitgere. Da wir fanden, dieſe Gere ſey $\frac{1}{2}$ einer der 6 ungleich 4kantigen

Axen, ſo iſt bd $\frac{1}{8}$ einer ſolchen Axe, und 2 bd d. i. 2 Axen 2er aufgeſetzten Pyramiden ſind = $\frac{2}{8}$ = $\frac{1}{4}$ jener 4kantigen Axe. Dieſe wird alſo an jedem Ende um $\frac{1}{8}$ verkürzt, wenn man die 2 aufgeſetzten Pyramiden ihrer Polecken wegſchneidet. Die verkürzten Axen entſprechen aber der Flächenaxe des eingeſchriebenen 12flachs. Die Axe der aufgeſetzten Pyramide (bd Fig. 21) iſt $\frac{1}{6}$ dieſer Flächenaxe oder der langen Gere des eingeſchriebenen 12flachs. —

Wir halten den Leuzit zwiſchen einer ſenkrechten ungleich 4kantigen Axe, und ſchneiden die (oben betrachtete) obere und untere Pyramide weg. 2 Grundecken jeder Pyramide fallen mit 2 Hauptleuzitecken, 2 mit 2 3kantigen Ecken zuſammen. Es würden nun 2 Linien die # der ſenkrechten Axe zwiſchen einer 3kantigen obern und untern und zwiſchen einer obern und untern Hauptecke gedacht werden, einander gleich ſeyn, da ſie mit denſelben 2 einander #en Ebenen der obern und untern Abſtumpfungsfläche rechte Winkel bilden. Beide verhalten ſich aber zur abgeſtumpften Axe wie $\frac{6}{8} : \frac{8}{8} = 3 : 4$. Durch Vergleichung mit ähnlichen Linien des eingeſchriebenen 12flachs fanden wir ſchon die Gleichheit beider Linien.

Ein Schnitt der # den 2 erwähnten Abſtumpfungsflächen der ungleich 4kantigen Axe. Er geht durch 4 3kantige, 2 Haupt-, 2 ungleich 4kantige Leuzitecken, durch 2 Paar #e kurze Geren und 2 Paar #e kurze Kanten. Er hälftet die 4kantige Axe, ſo wie der ihm entſprechende Schnitt beim umſchriebenen 12flach durch 2 #e kurze Geren und 2 Paar #e Kanten die Flächenaxe hälftet, welche mit jener 4kantigen Leuzitaxe eins iſt. — Mit den

oft erwähnten Abſtumpfungsſchnitten der ungleich 4kantigen Axe verbunden, theilt er dieſe Axe in 2 × $\frac{1}{8}$ und 2 × $\frac{3}{8}$. —

Wir halten den Leuzit zwiſchen einer ſenkrechten 3kantigen Axe. Da dieſe Axe mit der 3kantigen Axe, die 6 Hauptleuzitecken mit den 6 4kantigen Ecken des eingeſchriebenen 12flachs eins ſind, ſo folgt aus Vergleichung mit Fig. 17:

1. Wenn man die 2 3kantigen Ecken, welche die ſenkrechte Leuzitaxe begränzen, abſtumpft, und zwar ſo, daß der obere Schnitt durch die 3 obern, der untere Schnitt durch die 3 untern Hauptecken geht, ſo ſchneidet man von jedem Ende der Axe $\frac{1}{6}$ ab.
2. Schneidet man # den beiden Abſtumpfungsflächen weiter, ſo daß die Schnitte durch je 3 obere und 3 untere in einer (waagrechten) Ebene liegende 3kantigen Ecken gehn, ſo verkürzt man die 3kantige Axe an jedem Ende um $\frac{2}{6}$. Zugleich wird der obere Schnitt von 3 abwechſelnden ſenkrechten obern, der untere von 3 abwechſelnden ſenkrechten untern kürzeren Geren, $\frac{1}{3}$ wegſchneiden, da dieſe Geren den Kanten des 12flachs entſprechen.
3. Schneide man # den unter 1 und 2 aufgeführten Schnitten durch 6 in derſelben Ebene liegende längere Geren, und 6 ungleich 4kantige Ecken. Daß dieſe Ecken in derſelben Ebene liegen, ergiebt ſich aus Vergleichung mit dem umſchriebenen 12flach. Denn ſie entſprechen bei dieſem

den Mitten von 6 Rauten, die # derſelben 3kan- tigen Axe. Die langen Geren ſind Verbindungs- linien dieſer Mitten. — Dieſer Schnitt geht — nach obigem — auch durch die Mitten von 6 der ſenkrechten 3kantigen Axe #en Rauten des ein- geſchriebenen 12flachs und durch 6 derſelben Axe #e 12flachs Kanten, welche mit 6 durchſchnit- tenen ſenkrechten der Axe #en kürzeren Leuzitge- ren eins ſind. Dieſe Geren werden alſo — wie die 12flachskanten Fig. 17. — in $\frac{1}{3}$ zerlegt, das nach der 3kantigen, und $\frac{2}{3}$ die nach der Haupt-Leuzit- ecke zu liegen. — Die 3kantige ſenkrechte Leuzit- axe wird — wie die entſprechende 3kantige Axe des 12flachs durch den entſprechenden Schnitt — gehälftet.

Verbindet man die unter 1. 2. 3 aufgeführten 2 u. 2 und 1 Schnitte, ſo wird die 3kantige Axe in $6 \times \frac{1}{6}$ zerlegt. Aus dem Vorigen ergiebt ſich zugleich

1 daß die längere Leuzitgere durch die kürzere ſenk- recht durchſchnitten und — wie leicht zu bewei- ſen — gehälftet, die kürzere von der längeren aber in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ zerlegt wird.

2 Der unter 2 aufgeführte Schnitt nahm von der kürzeren Gere das nach der Hauptecke zu gelege- ne $\frac{1}{3}$ weg. Dieſer Schnitt in Verbindung mit der längeren Gere dreitheilt alſo die kürzere Gere. Fig. 22. Leuzitfläche. Zugleich hälftet er Fig. 22 die Kanten ab, bc in e und f. △ abh ∾ △ ebg, da eg # ab. Fig. 22

ab : eb = hb : gb = 2 : 1

3. Fig. 22. Ziehe ag und gr. ag = und # dc und gc = und # ad wie leicht zu beweiſen. Im △ agb ſteht dem größeren (über 90° betragenden) Winkel abg die größere Seite gegenüber. Daher die Kante ab > ag das ſelbſt = der Kante dc. So läßt ſichs beweiſen daß 8 × 3 an den 3kantigen Leuzitecken zuſammentreffende Kanten kürzer als die 24 übrigen ſind.

C. a. Wie verhält ſich ein Rauten12flach das um einen Leuzit beſchrieben wird, zu einem 2ten in denſelben Leuzit beſchriebenen?

Die Flächenaxe des umſchriebenen 12flachs entſpricht einer ungleich 4kantigen Leuzitaxe, die Flächenaxe des eingeſchriebenen derſelben Axe, von welcher an beiden Polen eine 4kantige Pyramide durch ihre Grundgeren abgeſchnitten iſt. Sie iſt mithin um 2 Axen der abgeſchnittenen Pyramiden verkürzt, alſo, wie wir ſahen, um $\frac{2}{8}$. Die Flächenaxe des umſchriebenen 12flachs verhält ſich alſo zur Flächenaxe des eingeſchriebenen $= \frac{8}{8} : \frac{6}{8} = 4 : 3$. —

Eine Linie zwiſchen 2 3kantigen Leuzitecken und eine zwiſchen 2 Hauptleuzitecken, beide # einer ungleich 4kantigen Axe, fanden wir $\frac{6}{8}$ dieſer Axe. Jene Linien ſind = den langen Geren des eingeſchriebenen 12flachs, ſo wie die 4kantige Axe ſelbſt = der langen Gere des umſchriebenen. Die lange Gere des umſchriebenen 12flachs verhält ſich alſo zur langen [8]) Gere des einge-

8) Dies folgt ſchon aus dem Vorigen, da ja die Flächenaxe eines 12flachs = ſeiner langen Gere.

ſchriebenen wie $\frac{8}{8}$: $\frac{6}{8}$ = 4 : 3. — Es verhält ſich daher die *lange Leuzitgere*, welche $\frac{1}{2}$ ihrer ungleich 4kantigen Axe, zu den angegebenen 2 Leuzitlinien = 2 : 3.

Es müſſen ſich nun alle gleichartigen Linien beider 12flache wie 4 : 3 verhalten, woraus für den Leuzit ſelbſt dieſes folgt:

Die Linie zwiſchen 2 ungleich 4kantigen Leuziteckén rechtwinklig durch eine Hauptaxe = einer kurzen Gere des umſchriebenen Rauten12flachs muß ſich zur Linie zwiſchen 2 3kantigen Leuzitecken # einer Hauptaxe — welche der kurzen Gere des eingeſchriebenen 12flachs entſpricht — auch wie 4 : 3 verhalten. Zur Hauptleuzitaxe aber wie 2 : 3, da dieſe das Doppelte der letzteren Leuzitlinie iſt. —

Halte die Hauptleuzitaxe ſenkrecht. Ein Schnitt durch 4 obere, einer durch 4 untere ungleich 4kantige Ecken ſchneiden alſo $\frac{2}{6}$ der Hauptleuzitaxe weg. Vereint man hiermit den Schnitt durch die gemeinſchaftliche waagrechte Grundfläche, ſo wird die Axe in $\frac{2}{6}$ und $\frac{2}{3}$ zerlegt. — Fügt man den 3 Schnitten einen durch 4 obere, einen durch 4 untere 3kantige Ecken hinzu, ſo zerfällt die Axe in 2 $\times \frac{2}{12}$, 2 $\times \frac{1}{12}$ und 2 $\times \frac{3}{12}$. —

Es ergiebt ſich, daß die Hauptleuzitaxe ſich zur ungleich 4kantigen Axe verhält, wie die 4kantige Axe des (eingeſchriebenen) 12flachs zu $\frac{4}{3}$ der langen Gere deſſelben 12flachs.

b. Wie verhält ſich ein Leuzit welcher um ein Rauten12flach beſchrieben wird, zu einem *in daſſelbe* 12flach beſchriebenen?

Eine der 6 4kantigen Axen des umſchriebenen Leuzits: einer des eingeſchriebenen = 4 : 3. Eben ſo verhalten ſich die langen Geren jener Leuzite als Hälften jener Axen.

Zum Veranſchauligen und zur nähern Betrachtung
Fig. 23 dieſer Verhältniſſe diene Fig. 23. 2 Leuzit- und 2 Rauten12flachdurchſchnitte, um- und eingeſchriebene[9]). Linien- und Winkelgrößen ſind als aus dem Vorhergehenden bekannt, eingetragen.

Vergleichen wir nun das eingeſchriebene Rauten12flach abc efg mit dem umſchriebenen ABC EFG.

1. ik = $\frac{3}{4}$ hd. Die Flächenaxe oder lange Gere des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{3}{4}$ der Flächenaxe oder langen Gere des umſchriebenen.
2. Das gleichſchenklige △ oce ∾ △ oCE, da ſie gleichſchenklig. Alſo
   oc : oC = ok : od = 3 : 4. Daher bei Verdopplung gc = $\frac{3}{4}$ GC. Die 3kantige Axe des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{3}{4}$ der 3kantigen Axe des umſchriebenen.

9) Der Leuzitdurchſchnitt abcdefgh (und ABCDEFGH) (Fig. 23.) iſt den bisher gegebenen Durchſchnitten des Würfels, 8flachs und Rauten12flachs entſprechend gewählt. Er geht durch 2 Paar ♯e kürzere Geren, 2 Paar ♯e kürzere Kanten, 4 3kantige, 2 Haupt- 2 ungleich 4kantige Ecken. Unter Leuzitdurchſchnitt ſchlechtweg verſtehe ich künftig gegenwärtigen. Am beſten dürfte man denſelben ſo entwerfen. Zuerſt den Durchſchnitt des Rauten12flachs abcefg. Hälfte ce in k, ag in i; ziehe ik. Verlängere ik nach d und h, ſo daß kd = ih = $\frac{1}{6}$ ik. Ziehe cd, de, gh, ha.

3. Daher auch

$$ce : CE = ok : od = 3 : 4.$$

Die kurze Gere des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{3}{4}$ der kurzen Gere des umſchriebenen.

4. $ce = \frac{1}{2}\, bf$, $CE = \frac{1}{2}\, BF$; Daher $bf : BF = ce : CE = 3 : 4.$

Die 4kantige Axe des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{3}{4}$ der 4kantigen Axe des umſchriebenen.

5. $\triangle\, boc \sim \triangle\, BoC$ da ſie gleichwinklig.

$$bc : BC = oc : oC = 3 : 4.$$

Die Kante des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{3}{4}$ der Kante des umſchriebenen.

Die Anwendung auf den um- und eingeſchriebenen Leuzit iſt leicht, da dieſelben Linien wie im Vorhergehenden zu vergleichen ſind. Nur dies iſt hinzuzufügen.

$$Hh = Dd = \frac{1}{6}\, hd. \text{ Daher}$$

$$hd : HD = 3 : 4.$$

Die ungleich 4kantige Axe des eingeſchriebenen Leuzits iſt $\frac{3}{4}$ der ungleich 4kantigen Axe des umſchriebenen.

Es verhält ſich demnach jede Linie des eingeſchriebenen Rauten12flachs zu der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen wie 3 : 4, und eben ſo jede Linie des eingeſchriebenen Leuzits zu der ihr gleichartigen des umſchriebenen[10]).

10) Aus obiger Betrachtung ergiebt ſich die Art ein Leuzittrapez zu beſchreiben. Die Raute efgh des Rauten12flachs (Fig. 21 b.) ſey gegeben. Theile ihre halbe lange Gere durch k und ihre Seite durch i in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Ziehe 2 Linien (Fig.

§. 12.

5) Würfel und Leuzit.

A. Der umſchriebene Würfel.

Man ſpitze jede Ecke des Würfels mit 3 Flächen zu, die Zuſpitzungsflächen auf die Würfelflächen aufgeſetzt. Berühren ſich je 4 Zuſpitzungsflächen in einer Würfelkante, ſo entſteht ein Mittelkryſtall zwiſchen Würfel und Leuzit, der 6 Gevierte und 8 × 3 △e hat. Man würde dieſen auch erhalten, wenn man auf jedes △ des Mittelkryſtalls zwiſchen Würfel und 8flach eine ſtumpfe 3kantige Pyramide aufſetzte, deren Grundfläche jenes △ deckte.

Schneidet man nun # den 24 Zuſpitzungsflächen weiter, bis je 4 derſelben in einer Flächenmitte des Würfels eine 4kantige Ecke bilden, ſo entſteht der Leuzit.

6 4kantige Hauptleuzitecken treffen alſo in die 6 Flächenmitten des Würfels. Die Linie, welche je 2 ſolcher Ecken, die nicht an derſelben Axe liegen, verbindet, iſt = der Linie zwiſchen den Mitten 2er an einander gränzenden Würfelflächen = der halben Gere des Würfels. —

Die 3 Hauptleuzitaxen ſind = den Würfelflächen Axen = den Würfelkanten.

Die

22) ac und db die ſich unter rechtem Winkel kreuzen. Mache ah = hc = $\frac{4}{6}$ alſo ac = $\frac{4}{3}$ der langen Gere, mache dh = $\frac{2}{3}$, hb = $\frac{4}{3}$ der Seite jener Raute. Ziehe ad, dc, cb, ba, ſo iſt abcd ein Leuzittrapez.

Die 24 Zuſpitzungsflächen der Würfelecken können als Abſtumpfungsflächen der Anfänge von 24 Kanten des Rauten12flachs betrachtet werden, welche der Würfel mit abgeſtumpften Kanten hat. Denn der Leuzit entſteht ja aus regelmäßiger Abſtumpfung der Kanten des 12flachs. — Je 6 jener Kantenanfänge laufen einer Würfelaxe # welche ſelbſt einer 3kantigen Axe des 12flachs entſpricht. Je 6 regelmäßige Abſtumpfungen jener Kanten laufen alſo auch # der Würfelaxe. Hält man daher den angegebenen Würfel mit zugeſpitzten Ecken ſenkrecht zwiſchen einer Axe, ſo liegen 6 Zuſpitzungsflächen — an jeder der übrigen 6 Ecken eine — ſenkrecht und # der Axe, und können als Anfänge von einer regelmäßigen 6ſeitigen Säule betrachtet werden. — Die einzelne Zuſpitzungsfläche welche der ganz ausgebildeten Leuzitfläche entſpräche, würde durch einen Schnitt erhalten, der — man halte den Würfel wieder zwiſchen einer ſenkrechten Axe — von einer untern waagrechten Gere nach der Mitte der drüber liegenden Kante gienge. Die Höhenlinie des durch dieſen Schnitt erhaltenen △s läuft von der Mitte der angegebenen Kante zur Mitte der waagrechten Gere, # der ſenkrechten Axe.

Fig. 24. Würfelrechteck. Fig. 24

Hälfte die 2 Kanten und 2 Geren und verbinde die Hälftpunkte durch ef, fg, gh, he, ſo ſind dieſe 4 Linien Höhenlinien von 4 einzeln ausgebildeten Zuſpitzungs△en des Würfels. Bildete man aber alle Zuſpitzungsflächen jeder der 4 Ecken aus, ſo würden je 3 in den Würfelax=

punkten k, o, m, n, zuſammentreffen, und ſtatt der Linien kf, of, mh, nh, entſtänden 2 und 2 Leuzitkanten, wie ſich dies weiter unten ergeben wird.

1. △ abc ∾ △ ebf. (Euclid VI, 6.)
ab : be = bc : bf = 2 : 1. Alſo auch ac : ef = 2 : 1.
Daher ef ⋕ ac, Winkel bef = 35°, Winkel bfe = 55°.
Eben ſo iſt △ bcd ∾ △ fcg; △ acd ∾ △ hgd; △ abd ∾ △ aeh.

Alle Winkel des durch Axen gekreuzten Würfelrechtecks ſind bekannt — aus der eben angegebenen Aehnlichkeit von △en ergeben ſich alle übrigen Winkelgrößen der Fig. 24.

Auch daß fe ⋕ ac ⋕ hg
fg ⋕ bd ⋕ eh.

2. △ abl ∾ △ ebk, da ek ⋕ al.
bl : bk = ba : be = 2 : 1. Eben ſo
dl : dm = 2 : 1. Daher
bk = kl = lm = md = $\frac{1}{4}$ bd und
km = $\frac{1}{2}$ bd.
Dieſelbe Theilung von ac in n, l, o.

3. △ bke von 110° und 2 × 35°, alſo
ek = bk = $\frac{bd}{4}$ = $\frac{km}{2}$.
Von ek auf en, mg, go überzutragen.

4. △ bkf von 70° und 2 × 55°, alſo
fk = bk = ek
von fk auf fo, mh, hn anzuwenden.

5. Die Rauten el, fl, gl, hl ſind gleich. Alſo

$$ko = nm = \frac{eg}{2}$$

aus 1—5 folgt.

a. Was ſchon erwähnt. Die Hauptaxe (eg) des dem Würfel eingeſchriebenen Leuzits iſt der Flächenaxe oder Kante dieſes Würfels gleich.

b. Die 3kantige Axe des eingeſchriebenen Leuzits (km) iſt um $\frac{1}{4}$ kürzer als die Axe des umſchriebenen Würfels (bd).

c. Die kurze Leuzitgere (ek) iſt $\frac{1}{2}$ der 3kantigen Axe (km) und $\frac{1}{4}$ der Axe des umſchriebenen Würfels (bd).

d. 2 kurze Leuzitgeren (ne und ke) bilden an einer Hauptleuzitecke (e) einen Winkel von 110°. Der Winkel den eine Zuſpitzungsfläche (ke) mit (ea) der Fläche des Würfels bildet iſt 145°.

e. Die Hauptaxe (eg) verhält ſich zur 3kantigen Axe (km) wie die kurze Gere der 12flachsraute (von 110° und 70°) zur Seite derſelben.

f. Die Linien (ko und nm) welche je 2 3kantige Leuzitecken # der Hauptaxe (eg) verbinden, ſind $\frac{1}{2}$ dieſer Axe und der Kante des umſchriebenen Würfels.

Die 4 letztern Reſultate gehn ſchon aus Vergleichung des Leuzits mit dem Rauten12flach hervor. Was insbeſondere das unter e aufgeführte betrifft, ſo würde es für die 2 gleichen Linien des dem Leuzit eingeſchriebenen 12flachs ſo lauten: die 4kantige Axe des 12flachs

verhält ſich zur 3kantigen, wie die kurze Gere (= der Hälfte jener 4kantigen Axe), zur 12flachskante (= der Hälfte der 3kantigen Axe). — Man erkennt auch aus Fig. 24, daß wenn man 4 kurze Leuzitgeren ne, ek, og, gm, die in einer Ebene liegen, verlängert, dieſelben ſich in den Kantenmitten f und h des dem Leuzit umſchriebenen Würfels ſchneiden. Die Verlängerungslinie jeder Gere kf, iſt gleich der Gere ke ſelbſt. Die 4 verlängerten Geren ef, fg ꝛc. deren jede einer 3kantigen Leuzitaxe gleich, bilden wieder eine Raute von 110° und 70°. — Dies gilt ebenfalls für das Rauten12flach, wenn man durch Verlängerung von 4 in einer Ebene gelegenen Kanten eine Raute (von 110° und 70°) bildet. Die Seite dieſer Raute iſt = der verdoppelten Kante = der 3kantigen Axe des 12flachs [11]).

B. Der eingeſchriebene Würfel.

Man ſtumpfe 6 Hauptleuzitecken zuerſt jede durch 4 an ihre Kanten gränzende ungleich 4kantige Ecken, mithin jede Axe um $2 \times \frac{4}{12}$ ab, ſo erhält man den Mittelkryſtall von Leuzit und Würfel. Schneidet man # den Abſtumpfungsflächen weiter, ſo daß jede Fläche durch 4 3kantige Ecken geht, welche der abgeſtumpften Ecke überzwerch gegenüber liegen, ſo entſteht der eingeſchriebene Würfel. Jede Hauptaxe wird durch die Schnitte um $2 \times \frac{3}{12}$ d. i. um $\frac{1}{2}$ verkürzt. — Die Ecken des eingeſchriebenen Würfels fallen alſo zuſammen mit den 3kantigen Ecken des umſchriebenen Leuzits, ſeine Axen mit den 3kantigen Axen, ſeine Kanten mit Linien welche je 2

11) Vergl. Anmerk. 5.

3kantige Leuzitecken ⌗ einer Hauptaxe verbinden, ſeine Geren mit Linien welche von einer 3kantigen Leuzitecke rechtwinklig durch eine Hauptaxe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke gezogen werden. —

Es ergiebt ſich, daß die Flächenaxe und Kante des eingeſchriebenen Würfels = ſind der halben Hauptleuzitaxe; ſeine Gere = der Linie, welche 2 Hauptleuzitecken, die nicht an derſelben Axe liegen, verbindet, ſeine Axe, = der doppelten kürzern Leuzitgere.

C. a. Es ſey ein Würfel um, einer in denſelben Leuzit beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Fig. 25 ſind ABCD und abcd Würfelrechtecke, AFBGDHCE und afbgdhce Leuzitdurchſchnitte. Fig. 25

1. Die Kante AC = fh des umſchriebenen iſt = der Hauptleuzitaxe, die Kante des eingeſchriebenen ac = $\frac{1}{2}$ fh = der halben Hauptleuzitaxe. Mithin iſt die Kante des eingeſchriebenen Würfels $\frac{1}{2}$ der Kante des umſchriebenen.

2. Die Axe CB des umſchriebenen Würfels fanden wir doppelt ſo groß als die 3kantige Axe cb des eingeſchriebenen Leuzits, ſie iſt daher doppelt ſo groß als die Axe des eingeſchriebenen Würfels, welche mit jener 3kantigen Axe zuſammenfällt.

3. △ ArB ∾ △ arb, da ſie gleiche Winkel haben.

Br : br = Ar : ar = AB : ab = 2 : 1.

Es iſt alſo die Gere ab des eingeſchriebenen Würfels = $\frac{1}{2}$ der Gere AB des umſchriebenen.

Mithin iſt auch die Kantenaxe des eingeſchriebenen Würfels st = ½ der Kantenaxe ik des umſchriebenen Würfels.

Sonach verhalten ſich je 2 gleichartige Linien des um- und des eingeſchriebenen Würfels wie 2 : 1.

Die Fläche des umſchriebenen wird daher 4 mal, ſein körperlicher Inhalt 8 mal ſo groß als des eingeſchriebenen ſeyn. Beide Würfel verhalten ſich daher ganz wie 2 Würfel, deren einer um, der andere in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben iſt. Natürlich, da die hier in Betracht kommenden 6 4kantigen und 8 3kantigen Ecken des 12flachs und des ihm umſchriebenen Leuzits zuſammenfallen.

b. Es ſey ein Leuzit um, einer in denſelben Würfel beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

1. Die Hauptaxe fh des eingeſchriebenen Leuzits iſt = BD, der Kante jenes Würfels, alſo wie dieſe ½ FH, ½ der Hauptaxe des umſchriebenen Leuzits.

2. Die 3kantige Axe bc des eingeſchriebenen Leuzits iſt ½ BC der Axe des umſchriebenen Würfels, mithin ½ der 3kantigen Axe des umſchriebenen Leuzits.

3. △ FBr ∾ △ Fbr.
   Fr : fr = BF : bf = 2 : 1.

Die kurze Gere des eingeſchriebenen Leuzits iſt ½ der kurzen Gere des umſchriebenen.

4. Die Linien ac und bd entſprechen 2 kurzen Geren des 12flachs, welches dem Leuzit fh eingeſchriebenen iſt, ts alſo der Flächenaxe oder langen Gere deſſelben 12flachs. Dieſes verwandelten wir in den umſchriebenen Leuzit, durch Aufſetzung einer 4kantigen Pyramide, deren Axe $\frac{1}{6}$ der Flächenaxe oder langen Gere des 12flachs. es $=$ tg $= \frac{1}{8}$ st. Eben ſo ſey kG $=$ iE $= \frac{1}{8}$ ik. Da ik $=$ 2 st, ſo iſt kG $=$ iE $=$ 2 tg $=$ 2 es. Theilen wir nun EG in 6 Theile, jeden Theil $=$ tg $=$ es, ſo wird ſich

Eg : eg $= \frac{16}{18} : \frac{8}{18} = 2 : 1$ verhalten. Sonach iſt die ungleich 4kantige Axe des eingeſchriebenen Leuzits $\frac{1}{2}$ der des umſchriebenen. [12])

Es verhalten ſich alſo je 2 gleichartige Linien des um- und eingeſchriebenen Leuzits wie 2 : 1.

§. 13.

6) 8flach und Leuzit.

A. Das umſchriebene 8flach.

Man ſpitze jede Fläche des 8flachs mit 4 Flächen zu, die auf die Flächen des 8flachs aufzuſetzen ſind. Berühren ſich je 4 Zuſpitzungsflächen in einer Kante des

12) Nach dem Geſagten iſt das Verhältniß der Hauptleuzitaxe fh zur ungleich 4kantigen Axe eg, wie das einer Würfelkante AC zu $\frac{2}{3}$ der Würfelkantenaxe oder Würfelgere, — oder wie das Doppelte der Würfelkante ac : $\frac{4}{3}$ der Würfelgere ab.

8flachs, ſo entſteht der Mittelkryſtall zwiſchen 8flach und Leuzit, der aus 24 ſpitzen gleichſchenkligen und 8 gleichſeitigen △en beſteht.

Schneidet man # den Zuſpitzungsflächen ſo weit, bis je 3 in der Mitte eines 8flach△s eine 3kantige Ecke bilden, ſo entſteht der Leuzit. —

8 3kantige Leuzitecken treffen demnach in die Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs. Eine Linie welche 2 3kantige Leuzitecken # einer Hauptaxe verbindet, iſt = der Linie, welche 2 △mitten des 8flachs # einer Axe verbindet. Jene Leuzitlinie iſt $\frac{1}{2}$ der Hauptleuzitaxe, dieſe 8flachslinie $\frac{1}{3}$ der 8flachaxe. Die Hauptleuzitaxe iſt daher $\frac{2}{3}$ der Axe des umſchriebenen 8flachs. Die Linie zwiſchen 2 benachbarten Hauptleuzitecken, iſt = der Linie, welche 2 3kantige Leuzitecken rechtwinklig durch eine Hauptaxe verbindet, dieſe aber = der Linie, welche 2 Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs rechtwinklig durch eine Axe verbindet = $\frac{2}{3}$ der 8flachkante.

Die Flächenaxe des umſchriebenen 8flachs iſt = der 3kantigen Leuzitaxe = der doppelten kurzen Leuzitgere.

Es ſey ein 8flach mit abgeſtumpften Kanten gegeben, an welchem die Anfänge der Kanten des Rauten12flachs. Die betrachtete 4flächige Zuſpitzung der Ecke des 8flachs, iſt nun regelmäßige Abſtumpfung jener Kantenanfänge. — Hält man das 8flach zwiſchen einer ſenkrechten Flächenaxe, ſo liegen 6 Zuſpitzungsflächen — oder Abſtumpfungsflächen von 6 12flachskanten — an jeder Ecke eine, ſenkrecht # der ſenkrechten Flächenaxe.

Jede dieſer Zuſpitzungsflächen macht mit den 2 △en, zwiſchen denen man das 8flach hält, rechte Winkel. So erſcheinen die 6 Flächen als Anfänge von Seitenflächen einer 6ſeitigen Säule, deren Endflächen jene 2 Flächen des 8flachs ſind. — Jede Zuſpitzungsfläche macht alſo mit der ihr an der zugeſpitzten Ecke gegenüber liegenden Fläche einen rechten Winkel.

Fig. 26. adgk Durchſchnitt eines 8flachs. Fig. 26

An jeder Ecke d und k denke man ſich 2 einander gegenüber liegende Zuſpitzungsflächen (Leuzitflächen) vollendet. Die Aufſatzkanten würden demnach die △mitten b, f, m, h ſchneiden, und jede Schnittfläche — wie wir ſahen — ſenkrecht auf die gegenüber liegende Fläche des 8flachs ſtehn. Daher fc, eine Höhenlinie der Schnittfläche, ſenkrecht auf der 8flachshöhenlinie ad, und ſo die 3 übrigen Höhenlinien. — In n und r ſchneiden ſich je 2 Zuſpitzungsflächen einer 8flachecke in 2 Hauptecken des eingeſchriebenen Leuzits, und fr, br, hr und mr ſtellen demnach kurze Leuzitgeren vor.

1. Trapez dcne. Bekannt ſind die Winkel von 90° 90° 70°. Der 4te iſt daher 360° — 250° = 110°. Dieſem gleich iſt ſein Scheitelwinkel in n, das iſt der Winkel, den 2 einander gegenüber liegende kürzere Leuzitgeren an einer Hauptecke bilden. So fanden wir den Winkel ſchon aus Vergleichung des Leuzits mit dem Rauten12flach und dem Würfel. Mit der Hauptaxe nr bildet die kurze Gere fr alſo einen Winkel von 55°.

2. △ fcd von 90° 70° 20°. Daher dc = $\frac{1}{3}$ df = $\frac{1}{3}$ db. Die vollendete Leuzitfläche ſchneidet alſo

von den an der zugeſpitzten 8flachecke ihr gegenüber liegenden Höhenlinie $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ d. i. $\frac{2}{9}$ ab. (Siehe die Figur).

3. Wir wiſſen daß Schnitte durch 4 obere und 4 untere △smitten des 8flachs rechtwinklig durch die ſenkrechte Axe gehn und dieſe 3 theilen. Es iſt alſo

$$oq = od = qk.$$

Die waagrechte Kantenaxe hälftete oq, daher

$$op = pq = \frac{1}{6}\ dk.$$

4. Ziehe die Flächenaxe des 8flachs mf $\#$ be, da beide ſenkrecht auf der Höhenlinie dg ſtehen.

△ bno ≌ △ ofp. (1 Seite 3 Winkel). Daher

a) bn = fp = $\frac{1}{2}$ fm. D. i. die kurze Leuzitgere iſt $\frac{1}{2}$ der Flächenaxe des umſchriebenen 8flachs, und wie wir ſchon früher fanden, $\frac{1}{2}$ der 3kantigen Leuzitaxe, die mit jener Flächenaxe eins.

b) $no = op = \frac{1}{6}\ dk.$

$pd = \frac{3}{6}\ dk.$

$pd - (no + op) = nd = \frac{1}{6}\ dk.$ Daher denn $nd = no = op$ auch $= pq = qr = rk = \frac{1}{6}\ dk.$ D. i.

die Axe des 8flachs iſt geſechstheilt.

c) nr die Hauptleuzitaxe iſt in o, p, q, ge4theilt. Dieſe Axe ſey ſenkrecht. Wir fanden ſchon früher daſſelbe, daß nämlich 2 Schnitte durch 4 obere und 4 untere 3kantige Ecken und einer durch die waagrechte gemeinſchaftliche

Grundfläche die Hauptaxe 4theile. (Siehe die Figur).

d) Es iſt alſo $\frac{1}{8}$ dk = $\frac{1}{4}$ nr, d. i. $\frac{1}{8}$ der Axe des umſchriebenen 8flachs iſt $\frac{1}{4}$ der Hauptaxe des eingeſchriebenen Leuzits. Jene Axe verhält ſich alſo zu dieſer = 6 : 4 = 3 : 2, was wir ſchon auf anderm Wege fanden.

5. s und v ungleich 4kantige Leuziteckeu. Die Linien fh und bm, die als kurze Geren des dem Leuzit eingeſchriebenen Rauten12flach b n f h o m betrachtet werden können, ſchneiden, wie wir wiſſen, von der ungleich 4kantigen Leuzitaxe sv, 2 × $\frac{1}{8}$ ab.

bmhf Würfelrechteck des dem 8flach eingeſchriebenen Würfels. ng = ta = $\frac{1}{6}$ ag. (Nach Fig. 9.)

Hieraus ergiebt ſich die Theilung der Linie ag (Fig. 26.) insbeſondere daß die ungleichkantige Leuzitaxe sv um $\frac{2}{18}$ kürzer iſt als die Kantenaxe ag (oder Kante) des umſchriebenen 8flachs.)

Die Hauptleuzitaxe verhält ſich zur ungleich 4kantigen Leuzitaxe = $\frac{3}{4}$ der 8flachsaxe : $\frac{8}{9}$ der 8flachskante. Dies Verhältniß ſtimmt ganz mit dem aus Vergleichung des Leuzits mit dem 12flach gefundenen. Betrachten wir dies näher.

Die Flächenaxe des Rauten12flachs = ſeiner langen Gere. 2 lange Geren bilden mit der 4kantigen Axe ein rechtwinkliges gleichſchenkliges △ adc. Verlängere den Schenkel ad um $\frac{1}{3}$ ſeiner ſelbſt bis b und ziehe bc, ſo wird im △ abc ſeyn: Fg. 27a

ab : ac = $\frac{4}{3}$ der Flächenaxe : 4kantigen Axe des 12flachs.

ab : ac = die ungleich 4kant. Leuzitaxe : Hauptleuzitaxe.

Fg. 27b Fig. 27b. Zwei 8flachkanten, welche einander an derſelben Ecke gegenüber liegen, bilden mit der 8flachaxe ein gleichſchenkliges rechtwinkliges △ adc. Mache ae = $\frac{8}{9}$ ad und af = $\frac{2}{3}$ ac. Ziehe ef. Es verhält ſich nach obiger Betrachtung.

Die Hauptleuzitaxe : ungleich 4kant. Leuzitaxe = af : ea.

d. i. wie $\frac{2}{3}$ der Axe : $\frac{8}{9}$ der Kante des umſchriebenen 8flachs. —

Verlängere ad nach b, ſo daß db = $\frac{1}{3}$ ad. Ziehe bc. Das △ abc iſt dem △ abc Fig. 27a ähnlich.

△ abc und △ aef.

ba : ea = ca : fa = 3 : 2.

Beide △e ſind alſo ähnlich, und das Verhältniß der Seite, welche die Hauptleuzitaxe vorſtellt, zu der, welche der ungleich 4kantigen Leuzitaxe entſpricht, iſt in beiden gleich. — Vergleichen wir hiermit das bei Betrachtung von Würfel und Leuzit aufgefundene Verhältniß zwiſchen der Hauptleuzitaxe und der ungleich 4kantigen Leuzitaxe. Wir fanden es gleich dem einer Würfelkante : $\frac{2}{3}$ der Würfelgere, oder wie das Doppelte der Würfelkante zu $\frac{4}{3}$ der Würfelgere.

Fg. 27c Fig. 27c ſtellt dieſe beiden Verhältniſſe dar. ab, bc, Würfelkanten, ac Würfelgere.

1) Hauptaxe : Ungl. 4k. Axe = ab : $\frac{2}{3}$ ac (oder ad).

2) ———— ———— = 2ab : $\frac{4}{3}$ ac = ae : af.

Vergleichen wir No. 1 mit dem (Fig. 27b) beym 8flach Aufgeſtellten. Da fanden wir:

Ungl. 4k. Axe : Hauptleuzitaxe = $\frac{8}{9}$ Kathete : $\frac{2}{3}$ Hypotenuſe

Hauptleuzitaxe : Ungl. 4k. Axe = $\frac{9}{9}$ Kathete : $\frac{2}{3}$ Hypotenuſe

Woraus ſich ergiebt, daß die Hauptleuzitaxe länger als die ungleich 4kantige Axe iſt [13]), daher auch die Linie, welche 2 3kantige Leuzitecken # einer Hauptaxe verbindet, länger als die lange Leuzitgere.

B. Das eingeſchriebene 8flach.

Man ſtumpfe die 8 3kantigen Ecken des Leuzits ab. Geht jede Abſtumpfungsfläche durch 3 Grundgeren der abgeſtumpften Ecke, ſo entſteht der Mittelkryſtall zwiſchen 8flach und Leuzit; geht ſie durch 3 Hauptleuzitecken, welche der abgeſtumften Ecke überzwerch gegenüber liegen, ſo entſteht das 8flach.

Die Axe dieſes eingeſchriebenen 8flachs iſt = der Hauptleuzitaxe; die 8flachkante = der Linie, die 2 benachbarte Hauptleuzitecken verbindet = der Linie von einer 3kantigen Ecke rechtwinklig durch eine Hauptaxe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke. — Die Flächenaxe des 8flachs iſt um $\frac{2}{6}$ kürzer als die 3kantige Leuzitaxe. (Vergleiche Leuzit und Rauten12flach).

C. a. Es iſt ein 8flach um, eins in denſelben Leuzit beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander? —

Die Axe des eingeſchriebenen iſt = der Hauptleuzitaxe, mithin wie dieſe = $\frac{2}{3}$ der Axe des umſchriebe-

13) Zugleich daß $\frac{2}{3}$ der Hypotenuſe eines gleichſchenkligen △s die mittlere Proportionallinie : zwiſchen $\frac{8}{9}$ und $\frac{9}{9}$ einer Kathete dieſes △s ſey.

nen 8flachs. Die Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ der 3kantigen Leuzitaxe, mithin der Flächenaxe des umſchriebenen 8flachs.

Die Kante des eingeſchriebenen iſt = der Verbindungslinie zwiſchen 2 3kantigen Ecken rechtwinklig durch eine Hauptaxe, mithin = der Verbindungslinie zwiſchen 2 Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs rechtwinklig durch eine Axe = $\frac{2}{3}$ der Kante dieſes 8flachs. Die Kanten des eingeſchriebenen 8flachs fallen mit den langen Geren des (demſelben Leuzit) eingeſchriebenen 12flachs zuſammen, und ſind wie dieſe $\frac{6}{8}$ der ungleich 4kantigen Leuzitaxe.

Es ergiebt ſich daß jede Linie des eingeſchriebenen 8flachs $\frac{2}{3}$ der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen 8flachs iſt.

b. Es iſt ein Leuzit um, einer in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Hauptaxe des eingeſchriebenen iſt $\frac{2}{3}$ der Hauptaxe des umſchriebenen u. ſ. w.

Jede Linie des eingeſchriebenen iſt $\frac{2}{3}$ der gleichartigen Linie des umſchriebenen.

Fig. 28 Fig. 28. Zum Veranſchauligen dieſer Verhältniſſe diene Fig. 28. Durchſchnitte 2er 8flache und 2er Leuzite. Die Figur ſtimmt ganz mit Fig. 19 überein, nur daß die kurzen Leuzitkanten

HG, GF, BC, CD }
hg, gf, bc, cd } hinzu kommen.

Aus Vergleichung von Fig. 28 mit Fig. 19 ergiebt es ſich, daß ein um den Leuzit beſchriebenes 8flach zu dem in denſelben Leuzit beſchriebenen ſich ganz ſo

verhalte, wie ein um ein Rauten12flach beſchriebenes 8flach zu dem 8flach, welches in daſſelbe 12flach beſchrieben wird.

Eben ſo verhalten ſich 2 Leuzite, deren einer um, einer in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie 2 Rauten12flache, deren eins um, eins in daſſelbe 8flach beſchrieben worden. Hauptaxen, 3kantige Axen und kurze Geren dieſer Leuzite ſtimmen ganz mit 4kantigen, 3kantigen Axen und Kanten jener Rauten12flache.

Daß auch die ungleich 4kantige Axe (Fig. 28.) des eingeſchriebenen Leuzits cg = $\frac{2}{3}$ der ungleich 4kantigen Axe CG des umſchriebenen ſey, zeigt die gegebene Eintheilung jener Axe, welche aus dem Verhältniſſe des Rauten12flachs zum 8flach und Leuzit folgt.

§. 14.

Verhältniß von Würfel, 8flach und Rauten12flach welche um und in denſelben Leuzit beſchrieben ſind, zu einander.

Jede Linie des eingeſchriebenen
{ Würfels : gleichartigen Linie d. umſchriebenen = 1 : 2
{ 8flachs : — — — — = 2 : 3
{ Rauten12flachs : — — — = 3 : 4

Die Kante des umſchriebenen Würfels iſt $\frac{2}{3}$ der Axe des umſchriebenen 8flachs = $\frac{3}{4}$ der 4kantigen Axe des umſchriebenen Rauten12flachs.

Die Gere des eingeſchriebenen Würfels iſt = der Kante des eingeſchriebenen 8flachs = der langen Rautengere des eingeſchriebenen Rauten12flachs.

Die Kante des eingeſchriebenen Würfels iſt $\frac{1}{2}$ der Axe des eingeſchriebenen 8flachs und = der kurzen Gere des eingeſchriebenen 12flachs oder = $\frac{1}{2}$ der 4kantigen Axe deſſelben.

Der umſchriebene Würfel iſt zugleich umſchriebener Würfel des eingeſchriebenen 8flachs und Rauten12flachs; das umſchriebene 8flach iſt zugleich umſchriebenes 8flach des eingeſchriebenen Würfels und Rauten12flachs; aber das eingeſchriebene Rauten12flach iſt zugleich umſchriebenes 12flach des eingeſchriebenen Würfels und 8flachs.

Dieſe Verhältniſſe laſſen ſich noch weit verfolgen.

Zu bemerken iſt, daß ſich die um den Leuzit beſchriebenen Körper anders zu einander verhalten, als die ähnlichen in denſelben beſchriebenen.

Fig. 29 Fig. 29. Zum Veranſchauligen der angeführten Verhältniſſe diene Fig. 29. Sie ſtellt einen Leuzitdurchſchnitt vor, um und in welchen die Durchſchnitte eines Würfels, 8flachs und Rauten12flachs beſchrieben ſind. — Alle bemerkten Linieneintheilungen gehn unmittelbar oder mittelbar aus dem Frühern hervor.

Eine leichte Probe der Richtigkeit der Eintheilung iſt, daß das Verhältniß einer beſtimmten Linie eines eingeſchriebenen Körpers zur gleichartigen Linie des umſchriebenen gleich ſeyn muß dem Verhältniß je 2 anderer gleichartigen Linien beider Körper. Z. B.

Die Axe des eingeſchriebenen 8flachs zur Axe des umſchriebenen = 12 : 18

die Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs zur Flächenaxe des umſchriebenen = 4 : 6

die Kantenaxe oder Kante des eingeſchriebenen 8flachs zur Kante des umſchriebenen = 12 : 18 d. i. alle 3 Verhältniſſe ſind = 2 : 3.

B. Die Nebenſippe des 4flachs.

§. 15.

1) 4flach und Würfel.

A. Der umſchriebene Würfel.

Der Würfel ſtehe auf ſeiner Fläche. Man ſtumpfe 2 abwechſelnde obere Ecken, 2 abwechſelnde nicht an denſelben 2 ſenkrechten Kanten gelegene untere Ecken ab, ſo erhält man einen Körper von 6 6ecken und 4 Δen. Geht jede der 4 Abſtumpfungen durch je 3 Grundgeren der abgeſtumpften Ecke, ſo entſteht das 4flach.

6 Kanten dieſes 4flachs ſind eins mit 6 Geren, 4 Ecken eins mit 4 nicht abgeſtumpften Ecken des umſchriebenen Würfels.

Fig. 30. Würfelrechteck. Man ſtumpfe die in a und b fallenden Ecken durch ihre Grundgeren ab. ed und ce ſind Höhenlinien der Grunddreiecke der abgeſtumpften Ecken oder der Flächen des 4flachs. Fig. 30

Nach Fig. 1. iſt Winkel cea = deb = 55°. Der Winkel ced, das iſt der Kantenwinkel des 4flachs, iſt alſo $180^{\circ} - (2 \times 55^{\circ}) = 70^{\circ}$. Daher denn jeder der 2 gleichen Winkel edc und ecd = 55°, d. i. jeder Winkel den eine Kante des 4flachs mit einer Höhenlinie

an einer Ecke bildet. — Dieſe Winkelverhältniſſe fanden wir ſchon Fig. 8., bei Vergleichung von Würfel und 8flach.

Fig. 31 Fig. 31. Durchſchnitt eines 4flachs durch ac und cb, 2 Höhenlinien die in der Kantenmitte c zuſammentreffen, und auf einer Kante ab ruhen. Dieſen Durchſchnitt wollen wir in der Folge ſchlechtweg **4flachsdurchſchnitt** nennen. [14])

Eine Axe, d. i. eine ſenkrechte Linie aus einer 4flachs-Ecke auf die ihr gegenüber liegende Fläche, trifft die Mitte dieſer Fläche, wie aus der Gleich- und Aehnlichkeit 3er △e, welche die Axe mit 3 Kanten, und 3er △e welche ſie mit 3 Höhenlinien bildet, hervorgeht. Denn die 3 waagrechten Grundlinien jener △e ſind gleich groß, d. i. der Punkt in welchem die ſenkrechte Axe die waagrechte Grundfläche trifft, iſt gleich weit von den 3 Ecken der Grundfläche entfernt. Eben ſo ſind die 3 waagrechten Grundlinien der 3 andern △e gleich groß, d. i. der Punkt in welchem die ſenkrechte Axe die waagrechte Grundfläche trifft, iſt gleich weit von den 3 Kantenmitten der Grundfläche.

Fig. 31. bd und ae ſind Axen. e und d ſind Mittelpunkte der 4flachs △e, daher $ec = \frac{1}{3}\, cb$ und $dc = \frac{1}{3}\, ac$. $ec = dc$.

△ aec

$ac = 3\, dc = 3\, ce.$

14) Fig. 12. zeigt, wie die Raute des Rauten12flachs zu entwerfen ſey. Gegenwärtiger Durchſchnitt iſt eine ſolche nach der kurzen Gere gehälftete Raute. Auch als ein halber Durchſchnitt des 8flachs (Fig. 9.) kann er betrachtet werden.

Bekannt ſind 2 Winkel von 90° und 70°. Der 3te Winkel $= 180^\circ - (90 \times 70) = 20^\circ$.

Im $\triangle$ aec von 90°, 70°, 20° iſt alſo die Hypotenuſe ac 3 mal ſo groß als die Seite ce, die dem Winkel von 20° gegenüber liegt. [15])

20° iſt hiernach den Winkel der die 4flachsaxe mit der Höhenlinie, $55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$ der Winkel, den ſie mit der Kante des 4flachs bildet.

Fig. 31. $\triangle$ afd $\cong$ $\triangle$ bfe.

be $=$ ad.

Bekannt ſind die Winkel von 90° und 20°, der 3te Winkel (bei f) in jedem der $\triangle$e iſt daher von 70°. Es iſt alſo.

af $=$ fb

df $=$ fe

af $=$ 3 fd (da die Winkel von 90° 70° 20°) alſo

$=$ 3 fe. Ebenſo

bf $=$ 3 fe $=$ 3 fd.

Die Axen ae und bd kreuzen ſich alſo im Punkte des Köpers f unter 70° und 110° ſo [16]), daß dieſer Punkt gleich weit von den Ecken a und b liegt, und gleich weit von den Flächenmitten d und e, alſo Mittelpunkt des Körpers iſt.

15) Genauer im $\triangle$ von 90°
70° $31'$ $44''$
19° $29'$ $16''$

16) Unter denſelben Winkeln wie die Würfelaxen, deren Theile ſie ſind, wie die Flächenaxen des 8flachs, wie die 3kantigen Axen des Rauten12flachs und Leuzits.

Der Theil einer Axe von der Ecke bis zu dieſem Mittelpunkte iſt 3mal ſo lang, als der Theil von demſelben Mittelpunkte bis zur Flächenmitte.

Fälle die Kantenaxe cg. cf = fg. (Vergleiche Fig. 26. △ bdf in welchem dr = no) d. i. die Kantenaxe wird im Mittelpunkte f des 4flachs gehälftet.

Im △ bda iſt $da^2 : db^2 : ab^2 = 1 : 2 : 3$, wie die Winkelgrößen zeigen. Alſo verhalten ſich $\frac{2}{3}$ Höhenlinien des 4flachs : 4flachs Axe : 4flachs Kante = Würfelkante : Würfelgere : Würfelaxe.

Fig. 32 Fig. 32. Würfelrechteck. Nach Fig. 2. ſchneidet ce $\frac{1}{3}$ der Würfelaxe ad ab. ce iſt aber nach Fig. 30. eine Höhenlinie des 4flach△s, df mithin eine 4flachsaxe. Dieſe iſt alſo $\frac{2}{3}$ der Axe des umſchriebenen Würfels. Es ergiebt ſich auch, daß man den Würfel, welcher um das 4flach zu beſchreiben, erhält, wenn man auf jede Fläche des 4flachs eine rechtwinklig 3kantige Pyramide aufſetzt, deren Axe halb ſo lang iſt als die Axe des 4flachs und deren Grundkantenwinkel 55°.

B. Der eingeſchriebene Würfel.

Stumpfe die 6 Kanten des 4flachs ab, ſo entſteht ein Körper von 4 △en und 6 Sechsecken. Jedes 6eck hat 2 einander überzwerch gegenüber liegende rechte Winkel. Schneidet man # den 6ecken weiter, bis je 3 in einem 4flachs△ eine 3kantige Ecke bilden, ſo entſteht der Würfel.

4 Ecken des eingeſchriebenen Würfels fallen alſo in 4 △mitten des 4flachs, ſeine Geren ſind daher = den Linien, welche je 2 Flächenmitten des 4flachs verbinden,

$= \frac{1}{3}$ der Kante des 4flachs (Fig. 6). Das Nähere ſiehe im Folgenden.

C. a. Ein Würfel wird um, einer in daſſelbe 4flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Fig. 33. In das Würfelrechteck ABCD iſt der 4flachs=Durchſchnitt CED eingeſchrieben. ab, die Linie, welche die △smitten des 4flachs verbindet, iſt, wie wir ſahen, die Gere des eingeſchriebenen Würfels. Fig. 33

1. ab $= \frac{1}{3}$ CD. Die Gere des eingeſchriebenen Würfels iſt $= \frac{1}{3}$ der 4flachskante CD $= \frac{1}{3}$ der Gere des umſchriebenen Würfels.

2. oa = ob d. i. $\frac{1}{3}$ Da $= \frac{1}{3}$ Cb. Mache od = oc = oa = ob. Ziehe bd, dc, ca ſo iſt abcd Rechteck des dem 4flach CED eingeſchriebenen Würfels. Dies geht aus dem ≌ ſeyn der gleichſchenkligen △e bod und aoc; — aob und cod und den hieraus folgenden Winkelgrößen von abcd hervor, (Siehe die Figur).

3. △ BoD ≌ △ bod, da ſie dieſelben Winkel haben.

bd : BD = bo : Bo = 3 : 9 = 1 : 3. Die Kante des eingeſchriebenen Würfels iſt $\frac{1}{3}$ der Kante des umſchriebenen. Daß aber bo $= \frac{1}{3}$ Bo ergiebt ſich daraus, daß es ja $\frac{1}{3}$ Co und Co = Bo. Iſt aber bo $= \frac{1}{3}$ Bo, ſo iſt bc $= \frac{1}{3}$ BC, die Axe des eingeſchriebenen Würfels $\frac{1}{3}$ der Axe des umſchriebenen.

Demnach iſt jede Linie des eingeſchriebenen Würfels $\frac{1}{3}$ der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen.

Da die Kante des umſchriebenen Würfels das 3fache der Kante des eingeſchriebenen, ſo iſt die Fläche des umſchriebenen das 9fache, der Körper das 27fache des eingeſchriebenen Würfels.

B. Ein 4flach (CED) wird um, eins ced in denſelben Würfel (abcd) beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

1. cd = ab = $\frac{1}{3}$ CD. Die Kante des eingeſchriebenen 4flachs iſt = der Gere des umſchriebenen Würfels, daher wie dieſe, $\frac{1}{3}$ der Kante des umſchrieben 4flachs [17].

2. ef = $\frac{1}{3}$ EF. Die Kantenaxe des eingeſchriebenen 4flachs (= der Flächenaxe des Würfels abcd, dieſe ſelbſt = $\frac{1}{3}$ der Flächenaxe des Würfels ABCD), iſt $\frac{1}{3}$ der Kantenaxe des umſchriebenen 4flachs.

3. Die Axe ch des eingeſchriebenen 4flachs iſt $\frac{2}{3}$ der Axe cb des ihm umſchriebenen Würfels, welche ſelbſt ($\frac{1}{3}$ CB daher) $\frac{1}{2}$ der Axe Cb des umſchriebenen 4flachs. Alſo iſt die Axe des eingeſchriebenen 4flachs $\frac{1}{3}$ der Axe des umſchriebenen.

Sonach iſt jede Linie des eingeſchriebenen 4flachs $\frac{1}{3}$ der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen.

17) Hieraus folgt, wie wir im folgenden § genauer ſehn werden, daß ſich das 4flach ced ſo in das 4flach CED einſchreiben läßt, daß ſeine 4 Ecken in die 4 Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs fallen.

§. 16.

2) Vierflach und Achtflach.

A. Das eingeſchriebene 8flach.

Man ſtumpfe die Ecken des 4flachs ab, ſo erhält man einen Körper von 4 gleichwinkligen 6ecken und 4 gleichſeitigen △en. Berühren ſich die Abſtumpfungsflächen in den Kanten des 4flachs, ſo entſteht das eingeſchriebene 8flach.

Umgekehrt kann man dieſes in das umſchriebene 4flach verwandeln, wenn man auf eine Fläche des 8flachs und auf 3 Flächen welche jener Fläche an 3 Ecken gegenüber liegen auf jede Fläche ein 4flach aufſetzt, deſſen Fläche = der des 8flachs.

Die Ecken des eingeſchriebenen 8flachs entſprechen den Kantenmitten des umſchriebenen 4flachs, ſeine Axen alſo den 4flach Kantenaxen. Die Kante des 8flachs iſt = der halben Kante des 4flachs, die Höhenlinie des 8flach △s = der halben Höhenlinie des 4flach△s die Flächenaxe des 8flachs = der halben 4flachsaxe. Das △ des 4flachs iſt das 4fache vom △ des 8flachs.

B. Das umſchriebene 8flach.

Es liege ein 8flach auf einer Fläche. Man ſchneide # dieſer Fläche und # 3en nach oben zuſammengeneigten Flächen ſo lange, bis je 3 der Schnittflächen in der Mitte eines der 4 übrigen ſchwindenden △e des 8flachs eine 3kantige Ecke bilden, ſo erhält man ein 4flach.

Die Ecken dieſes 4flachs treffen alſo in die Mitten der 4 ſchwindenden 8flach △e; ſeine Kanten entſprechen den Linien welche die Mitten zweier an einer Ecke gegenüber liegenden 8flach △e rechtwinklig durch die Axe verbinden. Sie ſind alſo $\frac{2}{3}$ der 8flachkanten. Seine Axe iſt der Flächenaxe des 8flachs gleich.

C. a. Ein 4flach ſey um, eins in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Man denke ſich ein 4flach, welches durch Abſtumpfung der Ecken zuerſt in ein 8flach verwandelt wird, bei fortgeſetzter #er Abſtumpfung aber, wenn ſich je 3 Abſtumpfungsflächen in der Mitte der 4flachs △e berühren, in das dem 8flach wieder eingeſchriebene 4flach. Es fallen alſo die Ecken des einſchriebenen 4flachs in die Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs ſelbſt. Seine Kanten ſind demnach = den Linien welche 2 Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs verbinden = $\frac{1}{3}$ der Kanten deſſelben 4flachs.

b. Ein 8flach ſey um, eins in daſſelbe 4flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Kante des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{1}{2}$ der 4flachskante, die ſelbſt $\frac{2}{3}$ der Kante des umſchriebenen 8flachs iſt. Alſo iſt die Kante des eingeſchriebenen 8flachs $\frac{1}{3}$ von der Kante des umſchriebenen.

Zum Veranſchauligen und zur nähern Ausführung des Geſagten diene Fig. 34. In das 4flach ABC iſt das 8flach DEFC, in dieſes das 4flach ghi, in dieſes das 8flach khlm beſchrieben. ghi iſt zugleich Durchſchnitt

Fig. 34

eines 4flachs, das in das 4flach ABC eingeſchrieben iſt, ſo daß ſeine Ecken g und i in die Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs fallen.

Die Kante des 4flachs ghi nämlich gi iſt gegeben

gi # DF (# AB)
ih # EF
gh # DE

Da nun 3 Seiten des △ DEF # 3en Seiten des △ ghi, ſo ſind beide △e ähnlich.

△ DEF ∾ △ DFC ∾ △ ABC, daher
△ ghi ∾ △ ACB und Durchſchnitt des eingeſchriebenen 4flachs.

1. gi : AB = Ci : CB = 2 : 6 = 1 : 3.
   Die Kante des eingeſchriebenen 4flachs iſt $\frac{1}{3}$ der Kante des umſchriebenen.
2. gh : AC = gi : AB = 1 : 3.
   Die △s Höhenlinie des eingeſchriebenen 4flachs iſt $\frac{1}{3}$ der Höhenlinie des umſchriebenen.
3. △ BgC ∾ △ Bqi, da qi # gC.
   Bg : gq = BC : iC = 3 : 1.
   Die Axe (qg) des eingeſchriebenen 4flachs iſt $\frac{1}{3}$ gB der Axe des umſchriebenen.
4. △ hmi ∾ △ ECB (Winkel)
   hm : EC = hi : BC = 1 : 3.
   Die Kantenaxe des eingeſchriebenen 4flachs iſt $\frac{1}{3}$ der Kantenaxe des umſchriebenen.

Sonach iſt jede Linie des eingeſchriebenen 4flachs $\frac{1}{3}$ der gleichartigen Linie des umſchriebenen.

Die Verhältniſſe des um- und eingeſchriebenen 8flachs ſind hiernach ſchon unmittelbar oder doch mittelbar gegeben.

1. $hm = \frac{1}{3} EC$. Die Axe des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{1}{3}$ der Axe des umſchriebenen.

2. $kl = \frac{1}{2} gi$

$gi = \frac{2}{3} DF$

$kl = \frac{1}{3} DF$

Die Kantenaxe oder Kante des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{1}{3}$ der Kante des umſchriebenen.

3. $gr = \frac{1}{2} Bg$

$gq = \frac{1}{3} Bg$

$sq = \frac{1}{2} gq = \frac{1}{6} Bg = \frac{1}{3} gr$.

Die Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs iſt $\frac{1}{3}$ der des umſchriebenen.

Sonach iſt jede Linie des eingeſchriebenen 8flachs $\frac{1}{3}$ der gleichartigen Linie des umſchriebenen.

§. 17.

3) Vierflach und Rauten12flach.

A. Das umſchriebene 4flach.

Man ſpitze jede Ecke des 4flachs mit 3 Flächen zu, welche auf die Flächen aufzuſetzen ſind. Treffen je 4 Zuſpitzungsflächen in der Mitte einer 4flachskante zuſammen, ſo entſteht ein Körper von 4 gleichſeitigen △en und 12 ſtumpfen gleichſchenkligen. Schneidet man # den

letzteren ſo weit bis je 3 in der Mitte eines 4flach △s eine 3kantige Ecke bilden, ſo entſteht das dem 4flach eingeſchriebene Rauten12flach.

4 3kantige Ecken des 12flachs fallen mit den Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs zuſammen. Hält man das 12flach zwiſchen einer ſenkrechten 3kantigen Axe, ſo iſt die untere Polecke eine dieſer 3kantigen Ecken, 3 andere liegen der obern Polecke überzwerch gegenüber. Die Linie zwiſchen je 2 dieſer 3kantigen Ecken = der langen Gere des 12flachs iſt = der Linie zwiſchen 2 Flächenmitten des 4flachs = $\frac{1}{3}$ der Kante des 4flachs.

Um dieſe Umgeſtaltung leichter zu faſſen, vergleichen wir dieſelbe mit der Verwandlung 1, des Würfels 2, des 8flachs in das Rauten12flach.

1. a. Hält man den Würfel mit abgeſtumpften Kanten zwiſchen einer ſenkrechten Axe, ſo ſind 6 Abſtumpfungsflächen und die Kanten welche dieſe bilden ſenkrecht und # jener Axe.

Die Axe des 4flachs entſpricht der Würfelaxe, ſeine Zuſpitzungsflächen ſind, wie die Abſtumpfungsflächen der Würfelkanten, Anfänge der Flächen des Rauten12flachs. Steht daher das 4flach mit zugeſpitzten Ecken auf einer wagrechten Grundfläche, ſo ſind 3 × 2 Zuſpitzungsflächen an den 3 Grundecken, und 3 (oder 6) Zuſpitzungskanten ſenkrecht, der ſenkrechten Axe #.

b. Der Würfel mit abgeſtumpften Kanten ſtehe auf einer waagrechten Würfelfläche. 4 ſenkrechte Abſtumpfungsflächen bilden mit den 2 waagrechten Flächen — oder deren Geren — rechte Winkel.

Die 4flachskanten entſprechen den Würfelgeren. Halte das 4flach mit zugeſpitzten Ecken zwiſchen einer ſenkrechten Kantenaxe, ſo bilden 2 Zuſpitzungsflächen an den obern Ecken mit der obern Kante, 2 Zuſpitzungsflächen an den untern Ecken mit der untern Kante rechte Winkel; alle 4 Zuſpitzungsflächen ſind ſenkrecht, # der ſenkrechten Kantenaxe.

2. a. Stumpfen wir die Ecken des 4flachs ſchwach ab, ſo können die Abſtumpfungskanten als Kanten des 8flachs betrachtet werden. Stumpfen wir dieſe Abſtumpfungskanten wiederum regelmäßig ab, ſo entſteht die 3flächige Zuſpitzung der 4flachecken, aus welcher das Rauten12flach eben ſo hervorgeht, wie aus Abſtumpfung der Kanten des 8flachs.

Der Winkel den die Fläche des 8flachs mit der des 12flachs bildet, iſt — wie wir wiſſen — 145°, daher der Winkel den die Zuſpitzungsfläche des 4flachs mit der Fläche des 4flachs macht, auch 145° iſt.

b. Die Axe des 4flachs entſpricht der Flächenaxe des 8flachs. Legt man das 8flach mit abgeſtumpften Kanten auf eine waagrechte Fläche des 8flachs, ſo ſind 6 Abſtumpfungsflächen und 6 Abſtumpfungskanten ſenkrecht # der ſenkrechten Flächenaxe.

Stellt man das 4flach mit zugeſpitzten Ecken auf eine waagrechte Fläche, ſo ſind 3 × 2 Zuſpitzungsflächen an den 3 Grundecken und 3 (oder 6) entſprechende Zuſpitzungskanten ſenkrecht, der Axe # —, wie wir ſchon fanden.

c. Halte die Axe des 8flachs mit abgeſtumpften Kanten ſenkrecht, ſo liegen 4 Abſtumpfungsflächen ſenkrecht, der Axe # und bilden unter einander rechte Winkel. Der Axe des 8flachs entſpricht die Kantenaxe des 4flachs. Halte dieſe Kantenaxe des 4flachs mit zugeſpitzten Ecken ſenkrecht, ſo liegen 4 Zuſpitzungsflächen, an jeder Ecke eine, auch ſenkrecht, und ſchneiden ſich in den 4flachskanten unter rechten Winkeln.

Fig. 35. 4flachs Durchſchnitt mit 2 Axen ab, bd, und einer Kantenaxe ck. Fig. 35

Aus der Flächenmitte d ziehe de # der Kantenaxe ck ſenkecht auf die Kante ab. de iſt Höhenlinie einer einzeln vollendeten Zuſpitzungsfläche der Ecke a.

△ dae ∾ △ cak. Daher

ae = $\frac{2}{3}$ ak = $\frac{1}{3}$ ab.

de, dieſe Höhenlinie, ſchneidet daher (für ſich) $\frac{1}{3}$ der gegenüber liegenden Kante ab ab.

△ daf ∾ △ cag. Daher

fg = $\frac{1}{3}$ ag = $\frac{1}{4}$ oh = gh, alſo fg + gh = $\frac{1}{2}$ ah.

de, dieſelbe Höhenlinie hälftet die Axe ah in f.

Es iſt daher die 3kantige Axe fh des dem 4flach eingeſchriebenen Rauten12flachs $\frac{1}{2}$ der Axe des umſchriebenen 4flachs [18]).

Aus dem Axenhälftpunkte f ziehe fi # der Axe db. Dieſe Linie ſtellt — nach dem Obigen — die der Höhen-

18) Auch dies ergiebt ſich ſchon aus Vergleichung mit dem 8flach. Man bilde aus dem 4flach zuerſt ein 8flach. Deſſen Flächenaxe iſt $\frac{1}{2}$ der 4flachaxe und = der 3kantigen Axe des 12flachs welches ihm eingeſchrieben iſt.

linie df gegenüberliegende Zuſpitzungskante vor, weil ſie der Axe #.

△ afi ∾ △ agb.

ai : ab = af : ag = 2 : 3. Daher:

ac = $\frac{2}{3}$) der Kante ab.
ib = $\frac{1}{3}$)

Verlängere if nach l. Da il # bd, ſo ſteht ſie ſenkrecht auf ac.

△ ali ∾ △ adb. Daher

al : ad = ai : ab = 2 : 3.

Die vollendete Zuſpitzungskante würde alſo verlängert die ihr gegenüber liegende Höhenlinie in $\frac{4}{9}$ und $\frac{5}{9}$ zerlegen. (Siehe die Figur 35.)

Aus den ſchon bekannten Winkeln und der angegebenen Verzeichnung findet man alle Winkel leicht.

dfh = 55° Winkel der Zuſpitzungsfläche) mit der
ifh = 70° — — — kante) Axe
dfi = 125° — — — fläche mit der Zuſpitzungskante.

Dieſe 3 Winkel ſind uns ſchon aus früherer Betrachtung des Rauten12flachs bekannt.

B. Das eingeſchriebene 4flach.

Man halte das Rauten12flach zwiſchen einer 3kantigen ſenkrechten Axe, und ſtumpfe eine untere 3kantige Polecke und 3 3kantige Ecken, welche der obern Polecke überzwerch gegenüber liegen, ab. Schneidet man durch je 3 Grundgeren der 4 abgeſtumpften Ecken, ſo entſteht der Mittelkryſtall, zwiſchen dem (umſchriebenen) 12flach und dem (eingeſchriebenen) 4flach.

Schneidet man weiter, bis je 3 Abſtumpfungsflächen in einer der nicht abgeſtumpften 4 3kantigen Ecken eine neue 3kantige Ecke bilden, und verkürzt ſo jede 3kantige 12flachsaxe um $\frac{1}{3}$ (Fig. 16.) ſo entſteht das eingeſchriebene 4flach.

Die Ecken dieſes 4flachs kommen alſo in die eben beſtimmten 4 3kantigen Ecken des umſchriebenen 12flachs zu liegen; ſeine Kanten ſind Linien zwiſchen je 2 3kantigen Ecken rechtwinklig durch eine 4kantige Axe = den langen Geren des 12flachs.

C. a. Ein 4flach iſt um, eins in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

4 3kantige Ecken des eingeſchriebenen 12flachs fallen in die Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs, und in dieſelben 3kantigen 12flachsecken treffen die Ecken des eingeſchriebenenen 4flachs. Die Ecken des eingeſchriebenen 4flachs treffen alſo in die Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs, daher die Kante des eingeſchriebenen $\frac{1}{3}$ der Kante des umſchriebenen.

Die 3kantige Axe des 12flachs iſt $\frac{1}{2}$ der Axe des umſchriebenen, $\frac{3}{2}$ der Axe des eingeſchriebenen 4flachs. Alſo iſt die Axe des eingeſchriebenen 4flachs $\frac{1}{3}$ der Axe des umſchriebenen.

b. Ein Rauten12flach iſt um, eins in daſſelbe 4flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Linie von einer 3kantigen Ecke rechtwinklig durch die 4kantige Axe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke des Rauten12flachs iſt, wie wir wiſſen, = der langen Gere. Beim umſchriebenen 12flach iſt jene Linie =

der Kante des eingeſchriebenen 4flachs, beim eingeſchriebenen = der Linie zwiſchen 2 Flächenmitten deſſelben 4flachs. Die lange Gere des umſchriebenen 12flachs iſt alſo 3mal länger als die lange Gere des eingeſchriebenen.

Um das Verhältniß der eben betrachteten um- und eingeſchriebenen 4flache und 12flache anſchaulicher zu machen und genauer durchzuführen, diene Fig. 36.

Fig. 36.

ACB acb	4flachs	Durchſchnitte.
EFGD efgd	12flachs	

Verzeichne zuerſt ACB. Theile AC und CB in E und G in $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$. Ziehe EG. Verzeichne EGab ganz wie Fig. 33. — wie das Rechteck eines in das 4flach ACB eingeſchriebenen Würfels. Ziehe die Axen AG, BE und die Kantenaxe Cm. Mache cF = oc = ok = kD. Ziehe EF, FG, bD, Da, ſo iſt EFGbDa Durchſchnitt eines um den Würfel aEGb und in das 4flach ACB beſchriebenen Rauten12flachs. 4 ſeiner 3kantigen Ecken, deren E und G zwei ſind, würden in die Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs fallen.

acb Durchſchnitt des dieſem 12flach eingeſchriebenen 4flachs. Er iſt in das Würfelrechteck aEGb eben ſo verzeichnet wie Fig. 33. ced in abcd. Seine 4 Ecken, von denen a und b zwei ſind, würden in 4 3kantige Ecken des umſchriebenen 12flachs fallen.

efgd

efgd ein zweiter 12flachsdurchſchnitt iſt in abc eingeſchrieben, wie EFGD in ABC.

Die Linieneintheilungen und Winkelgrößen ergeben ſich aus dem Vorigen. Nur dies iſt zu bemerken: $\triangle$ ECG $\sim$ $\triangle$ ACB, kann alſo als Durchſchnitt eines 4flachs betrachtet werden. Cc Kantenaxe, GF und EF Axen, da ſie verlängert ſenkrecht auf EC und CG ſtänden (20° 70° alſo 90° der 3te Winkel). Die Axe hälftet, wie wir wiſſen, die Kantenaxe, alſo CF = Fc = $\frac{1}{3}$ Co. Eben ſo iſt cf = $\frac{1}{3}$ co. Da nun

om = oC

oF = oD, ſo iſt

oC — oF = om — oD, d. i. CF = Dm.

Es iſt alſo Dm = $\frac{1}{3}$ om, und eben ſo iſt dk = $\frac{1}{3}$ ko = cf. Nun ergiebt ſich aus Fig. 36

1. EG = $\frac{1}{3}$ AB
   EG = ab
   ___
   ab = $\frac{1}{3}$ AB.

Die Kante des eingeſchriebenen 4flachs iſt $\frac{1}{3}$ der Kante des umſchriebenen.

2. ck = $\frac{1}{3}$ Cm. Die Kantenaxe des eingeſchriebenen 4flachs iſt $\frac{1}{3}$ der Kantenaxe des umſchriebenen.

3. Da die 3kantige Axe des eingeſchriebenen 12flachs $\frac{1}{2}$ der 3kantigen Axe des umſchriebenen 4flachs, ſo iſt

   Bb = bE
   bE = $\frac{3}{2}$ be
   Bb + bE = $\frac{6}{2}$ = 3 be.

Die Axe des eingeſchriebenen 4flachs iſt $\frac{1}{3}$ der Axe des umſchriebenen.

So iſt jede Linie des eingeſchriebenen 4flachs $\frac{1}{3}$ der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen.

1. eg = $\frac{1}{3}$ ab = $\frac{1}{3}$ EG die lange Gere des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{1}{3}$ der des umſchriebenen.

2. ah = hg = gC alſo hg = $\frac{1}{3}$ aG.

Die 3kantige Axe des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{1}{3}$ der des umſchriebenen.

3. Ff = fd = dD alſo fd = $\frac{1}{3}$ FD.

Die 4kantige Axe des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{1}{3}$ der des umſchriebenen.

4. Aus Vergleichung der ähnlichen △e goi und Gob ergiebt ſich gi = $\frac{1}{3}$ Gb, d. i. die kurze Gere des eingeſchriebenen 12flachs iſt $\frac{1}{3}$ der des umſchriebenen.

So iſt jede Linie des eingeſchriebenen Rauten12flachs $\frac{1}{3}$ der gleichartigen Linie des umſchriebenen.

Zuſatz.

Man kann ſich das 4flach als aus 4 3ſeitigen Pyramiden zuſammengeſetzt denken, deren Grundflächen die △e des 4flachs, deren Spitzen im Mittelpunkt des 4flachs zuſammentreffen. Da der Winkel der 4flachskante ungefähr 70° beträgt, ſo iſt der Grundkantenwinkel einer ſolchen Pyramide 35°. Ihre Polkante entſpricht dem

Theile einer 4flachsaxe, der zwiſchen einer Ecke und dem Mittelpunkt des 4flachs liegt, iſt daher $\frac{3}{4}$ der 4flachsaxe. Ihre Seitenflächen ſind ſtumpfe gleichſchenklige $\triangle$e, deren ſtumpfer Winkel (an der Pyramidenſpitze) dem größeren Winkel entſpricht, den 2 4flachsaxen im Mittelpunkt des 4flachs bilden, und iſt alſo $= 110^{\circ}$. Die 2 gleichen Winkel an der Grundlinie jener $\triangle$e ſind daher jeder von 35°, und entſprechen dem Winkel den die 4flachsaxe mit der 4flachskante bildet. — Die Axe einer der 4 Pyramiden entſpricht dem Theile der 4flachsaxe, der zwiſchen dem Mittelpunkte und der Flächenmitte des 4flachs liegt, iſt alſo $\frac{1}{4}$ der 4flachsaxe — daher $\frac{1}{3}$ ihrer eigenen Polkante.

Es ſey ein 8flach gegeben, deſſen Fläche $=$ den Flächen 2er 4flache, deren jedes auf die beſchriebene Weiſe in 4 Pyramiden zerlegt iſt. Setze auf jede Fläche des 8flachs eine der 8 Pyramiden, ſo entſteht ein Rauten12flach. Den Körper eines ſolchen 12flachs kann man ſich daher als aus einem 8flach und 2 4flachen — alle 3 Körper von gleichen Flächen beſtehend — denken [19]).

19) Vergleiche Seite 32. Die Axe der aufgeſetzten Pyramide iſt $\frac{1}{4}$ der Axe des 4flachs und zugleich $\frac{1}{4}$ der Flächenaxe des 8flachs, dem ſie aufgeſetzt wird.

§. 18.

4) Vierflach und Leuzit.

A. Der eingeſchriebene Leuzit.

Das 4flach verwandelt ſich in den Leuzit durch Zuſchärfung ſeiner Kanten verbunden mit 3flächiger Zuſpitzung ſeiner Ecken, die Zuſpitzungsflächen auf die Kanten aufgeſetzt.

4 × 3 Zuſpitzungs-)
6 × 2 Zuſchärfungs-) flächen, zuſammen 24 Flächen.

Damit wir dieſe Umgeſtaltung leichter faſſen, wollen wir dieſelbe

1) mit dem Uebergange des 4flachs in das Rauten-12flach,
2) mit dem Uebergange des 8flachs in den Leuzit vergleichen.

I. Beim 4flach mit zugeſpitzten Ecken (Flächen des 12flachs) ſind 12 Kanten des 12flachs auch bei der ſchwächſten Zuſpitzung gegeben — es ſind die 12 Zuſpitzungskanten. 12 andere entſtehn erſt, wenn ſich je 2 Zuſpitzungsflächen die an zweien Ecken derſelben Fläche des 4flachs liegen, ſchneiden.

Stellten wir jenes 4flach mit ſtark zugeſpitzten Flächen auf eine waagrechte Fläche, ſo ſind 6 12flachskanten ſenkrecht ⧣ der ſenkrechten Axe des 4flachs, und bilden rechte Winkel mit der waagrechten Grundfläche des 4flachs.

Und ſo verhalten ſich 4 × 6 ſolcher Kanten zu 4 Axen und 4 Flächen des 4flachs.

Stumpfen wir nun dieſe 4 × 6 12flachskanten ab, ſo erhalten wir bekanntlich die 24 Leuzitflächen. 4 × 6 dieſer Flächen müſſen, wie die 4 × 6 Kanten, den 4 Axen des 4flachs # und ſenkrecht auf 4 Flächen des 4flachs ſeyn.

12 dieſer Leuzitflächen ſind Abſtumpfungsflächen der 4 × 3 Zuſpitzungskanten des zugeſpitzten 4flachs, die übrigen ſind Abſtumpfungsflächen der 4 × 3 Kanten, welche, wenn das 12flach vollendet aus dem 4flach hervorgeht, in 4 3kantigen Ecken deſſelben, der 4 übrig bleibenden Flächenmitten des 4flachs zuſammentreffen. Sie erſcheinen als 6 × 2 Zuſchärfungsflächen der 6 Zuſchärfungskanten.

2. Betrachte das 4flach als 8flach, und halte es zwiſchen einer Kantenaxe, welche der Axe des eingeſchriebenen 8flachs entſpricht. Wie bei der Verwandlung des 8flachs in den Leuzit jede Ecke mit 4 Flächen zugeſpitzt wird, die Zuſpitzungsflächen auf die 8flachsflächen aufgeſetzt — ſo jede Kantenmitte des 4flachs. 2 Zuſpitzungsflächen erſcheinen hier als Zuſchärfungsflächen der Kante, 2 ſchneiden die Ecken welche dieſelben begrenzen, ſchief ab — ſind 2 einzelne Zuſpitzungsflächen dieſer Ecken.

Legten wir jenes 8flach mit zugeſpitzten Ecken auf ſeine waagrechte Fläche, ſo waren 6 ſeiner Zuſpitzungsflächen, an jeder Ecke eine, ſenkrecht, # der ſenkrechten Flächenaxe, und bildeten mit den 2 waagrechten Flächen rechte Winkel.

Der Flächenaxe des 8flachs entſpricht die Axe des 4flachs.

Wir haben ein 4flach mit zugeſpitzten Kantenmitten, d. i. mit zugeſchärften Kanten und 3flächig zugeſpitzten Ecken, die Zuſpitzungsflächen auf die Kanten aufgeſetzt. Stelle es auf ſeine waagrechte Grundfläche, ſo müſſen 3 nach oben gelegene Zuſchärfungsflächen der Grundkanten, und 3 nach oben gelegene Zuſpitzungsflächen der Grundecken ſenkrecht und # der ſenkrechten Axe ſeyn. Und eben ſo, wenn man das 4flach auf eine ſeiner andern 3 Flächen legt. Es wird daher jede Zuſchärfungsfläche und jede Zuſpitzungsfläche # einer 4flachsaxe und deshalb ſenkrecht auf der ihr gegenüber liegenden Fläche ſeyn.

Fig. 37 Fig. 37. 4flachsdurchſchnitt abc.

wbxr Durchſchnitt des dem 4flach eingeſchriebenen 8flachs.

Die Axe dieſes 8flachs br iſt = der Kantenaxe des 4flachs, ſeine Flächenaxen nd und me ſind = der halben Axe des 4flachs.

Schärfe die 4flachskante, deren Mitte b iſt, ſo zu, daß die Aufſatzkanten die △mitten des 4flachs d und e ſchneiden, ſo erhälſt du 2 einzelne vollendete Leuzitflächen, deren kürzere Geren

df # der Axe ae und ſenkrecht auf die gegenüber liegende Höhenlinie bc

ef # der Axe cd und ſenkrecht auf bc.

Der Winkel dfe, den 2 ſolche Geren an der Hauptleuzitecke f machen, iſt 110°, wie aus bekannten Winkeln und der Art der Verzeichnung folgt. Der Winkel hda = fec, unter welchen die Zuſchärfungsflächen aufgeſetzt ſind = 160°.

Die Vergleichung von Fig. 37. mit der ganz entſprechenden Fig. 26. zeigt daß fb = $\frac{1}{3}$ br. Es nimmt alſo die vollendete Zuſchärfung $\frac{1}{6}$ der Kantenaxe weg. Mithin auch die vollendete Zuſpitzung der 4flachsecke, da je 2 Zuſchärfungs- und 2 Zuſpitzungsflächen in derſelben Hauptleuzitecke f zuſammentreffen.

Ich mache lr = bf = $\frac{1}{3}$ br. In l müſſen demnach 4 vollendete Zuſpitzungsflächen des Mittelpunkts r der Kante ac zuſammentreffen (2 Zuſchärfungsflächen der Kante ar, 1 Zuſpitzungsfläche der Ecke a, eine der Ecke c.) — In l fällt alſo die 2te Hauptleuzitecke, welche mit f an derſelben Axe fl liegt.

Hälfte dieſe Axe in o.

Ziehe durch l die Linie pnk # der Axe ae und der Leuzitgere df.

Eben ſo qlmi # cd und ef.

Es werden lm und ln kürzere Leuzitgeren die an der Ecke l zuſammentreffen, vorſtellen.

△ lon ≌ △ dof.

△ mol ≌ △ foe.

Hieraus folgt, daß

ml = fe = fd = ln, und Winkel mln = dfe = 110°.

Ferner daß on = od, daher dn die 8flachsaxe iſt und = $\frac{1}{2}$ cd = $\frac{1}{2}$ der 4flachsaxe.

dn iſt aber auch 3kantige Leuzitaxe, welche alſo $\frac{1}{2}$ der Axe des umſchriebenen 4flachs.

Die Linie bc theile ich ſo:

bx = xc = $\frac{9}{18}$ bc

ce = $\frac{12}{18}$ bc

$eb = \frac{6}{18}\, bc$

$xe = \frac{1}{3}\, bx = \frac{3}{18}\, bc$

$bh = \frac{1}{3}\, be = \frac{2}{18}\, bc$

$he = eb - hb = \frac{6}{18} - \frac{2}{18} = \frac{4}{18}\, bc$

$nx = xe$

$xk = \frac{1}{3}\, nx = \frac{1}{3}\, xe = \frac{1}{18}\, bc$

$ck = xc - xk = \frac{9}{18} - \frac{1}{18} = \frac{8}{18}\, bc.$

Die Linie ac theile ich alſo:

$\triangle\, pkc \sim \triangle\, aec$

$ap : pc = ek : kc = 4 : 8 = 1 : 2.$ Daher

$\left.\begin{array}{l} ap = \frac{1}{3} \\ pc = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$ ac. Eben ſo iſt

$\left.\begin{array}{l} qc = \frac{1}{3} \\ aq = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$ ac

Daher $ap = pa = qc = \frac{1}{3}\, ac$

$pr = rq = \frac{1}{6}\, ac$ da $\triangle\, qlr \cong plr.$

Die hiernach gemachte Eintheilung der Linien bc und ac Fig. 37. zeigt nun, wie die einzelne Zuſpitzungsfläche einer 4flachsecke, welche für ſich eine vollendete Leuzitfläche gäbe, bei einem auf einer waagrechten Fläche (ab) ſtehendem 4flach, vom untern $\frac{1}{3}$ Punkt (p) einer Kante, nach dem obern $\frac{4}{9}$ Punkt (k) der gegenüber liegenden Höhenlinie fällt. (Vergleiche Fig. 35. 12flachskante if.)

Die Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs fallen nun mit 4 3kantigen Ecken des Leuzits zuſammen. (Fig. 37. d und e ſind 2).

Man halte den Leuzit zwiſchen einer ſenkrechten 3kantigen Axe. Dann fällt die untere 3kantige Ecke in die Grundflächenmitte des umſchriebenen 4flachs, und 3

zunächſt der obern 3kantigen Polecke liegende 3kantige Ecken fallen in die Mitten der Pyramiden △e des 4flachs. Die übrigen 4, durch Zuſpitzung der 4flachsecken erzeugten 3kantigen Leuzitecken, fallen in die Axenmitten des 4flachs.

Die Linie, welche die Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs verbindet = $\frac{1}{3}$ der 4flachskante, iſt alſo = der Linie, welche von einer 3kantigen Ecke des eingeſchriebenen Leuzits rechtwinklig durch eine Hauptaxe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke gezogen wird, alſo auch = der Linie, welche 2 benachbarte Hauptleuzitecken verbindet.

Die 3kantige Axe des Leuzits iſt $\frac{1}{2}$ der Axe des umſchriebenen 4flachs, die Hauptleuzitaxe $\frac{2}{3}$ der Kantenaxe des 4flachs.

B. Das eingeſchriebene 4flach.

Halte den Leuzit zwiſchen einer ſenkrechten 3kantigen Axe. Stumpfe die obere 3kantige Ecke und 3 zunächſt um die untere 3kantige (Pol) Ecke liegende 3kantige Ecken ab, erſtlich jede durch ihre 3 Grundgeren, ſo entſteht ein Körper, der als ein 4flach mit zugeſchärften Kanten und 3flächig zugeſpitzten Ecken betrachtet werden kann, jede Zuſpitzungsfläche auf die Mitte einer Zuſchärfungskante aufgeſetzt. Schneidet man den 4 Abſtumpfungsflächen # weiter, bis jede derſelben 3 Hauptleuzitecken berührt, ſo entſteht ein 4flach mit zugeſpitzten Ecken, die Zuſpitzungsflächen auf die Mitte der Seitenkanten aufgeſetzt. Schneidet man endlich # jenen Ab-

ſtumpfungsflächen ſo weit, bis je 3 derſelben in einer der 4 übrigen 3kantigen Leuzitecken eine neue 3kantige Ecke bilden und die Leuzitflächen ganz ſchwinden, ſo entſteht das dem Leuzit eingeſchriebene 4flach.

Die 4 Ecken dieſes 4flachs kommen in die untere 3kantige (Pol)= und in die 3 obern 3kantigen Leuzitecken zu liegen, mithin in dieſelben Punkte, wie die Flächenmitten des umſchriebenen 4flachs. Die Kante des eingeſchriebenen 4flachs iſt = der Leuzitlinie zwiſchen 2 3kantigen Ecken rechtwinklig durch eine Hauptaxe.

Jeder der 4 Schnitte, durch welche der Leuzit in ein 4flach verwandelt wird, nimmt von jeder 3kantigen Leuzitaxe $\frac{1}{3}$ weg. (Siehe Leuzit und Rauten12flach). Die Axe des eingeſchriebenen 4flachs iſt mithin $\frac{2}{3}$ der 3kantigen Leuzitaxe.

C. a. Es iſt ein 4flach um, eins in denſelben Leuzit beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Kante des eingeſchriebenen iſt = der Linie zwiſchen 2 Flächenmitten des umſchriebenen, alſo = $\frac{1}{3}$ der Kante des umſchriebenen.

Die 3kantige Leuzitaxe iſt $\frac{1}{2}$ der Axe des umſchriebenen, $\frac{3}{2}$ der Axe des eingeſchriebenen 4flachs. Alſo iſt die Axe des eingeſchriebenen 4flachs $\frac{1}{3}$ der Axe des umſchriebenen.

So iſt jede Linie des eingeſchriebenen 4flachs $\frac{1}{3}$ der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen.

b. Es ſey ein Leuzit um, einer in daſſelbe 4flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

4 3kantige Ecken des umſchriebenen Leuzits fallen mit den 4 Ecken des 4flachs, 4 *gleichgelegene* 3kantige Ecken des eingeſchriebenen mit den 4 Flächenmitten des 4flachs zuſammen. Die Linie, welche 2 3kantige Leuzitecken rechtwinklig durch eine Hauptaxe verbindet, iſt daher beim umſchriebenen Leuzit = der 4flachskante, beim eingeſchriebenen = der Linie zwiſchen 2 Flächenmitten des 4flachs. Letztere Leuzitlinie iſt alſo $\frac{1}{3}$ der erſterern. *Und ſo iſt jede Linie des eingeſchriebenen Leuzits* $\frac{1}{3}$ *der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen.*

Zur Verſinnlichung der aufgeſtellten Verhältniſſe diene Fig. 38. DEFGHI und defghi ſind Durchſchnitte zweier Leuzite, ABC und abc Durchſchnitte zweier 4flache. Die Aehnlichkeit dieſer Figur mit Fig. 36. fällt in die Augen. Nur DI, Ia, FG, Gc im größern Leuzitdurchſchnitt, di, ik, fg, gl im Kleineren ſind hinzugefügt, wie auch die hälftende Linie pw. Linieneintheilungen und Winkelangaben ſind ſchon bei Fig. 36. begründet, ausgenommen die folgende Eintheilung der Linie pw. Fig. 38

1. $pw = \frac{1}{2} AC$
2. $qv = DF = \frac{1}{3} AC$ } alſo $qv = \frac{2}{3} pw$.
3. $vw = qp = \frac{pw - \frac{1}{3} pw}{2} = \frac{1}{6} pw$.
4. $vG = qI = \frac{1}{6} qv = \frac{1}{9} pw$. (Vergl. Fig. 25.)
5. $Gw = pI = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} pw = \frac{1}{18} pw$.
6. $ru = \frac{1}{2} ac = \frac{1}{2} qv = \frac{1}{3} pw$.

Dieſe 6 Stücke ſind auf die Durchſchnitte des innern Leuzits und des innern 4flachs anzuwenden, und ergiebt ſich daraus die Eintheilung der Linie pw in 64tel.

Die Verhältniſſe des innern und äußern Leuzits, wie des innern und äußern 4flachs ſind ganz wie Fig. 36. beim Rauten12flach und 4flach, da hier dieſelben Linien betrachtet werden.

Daß auch die ungleich 4kantige Leuzitaxe ig = ⅓ IG ergiebt ſich aus der begründeten Eintheilung der Linie pw.

§. 19.

Verhältniß der um und in ein Vierflach beſchriebenen 4 Hauptkörper zu einander.

Fig. 39 Fig. 39. Ein Würfel, 8flach, Rauten12flach und Leuzit ſind

1) um und

2) in ein 4flach

beſchrieben, wie verhalten ſie ſich unter einander?

I. a. Die Kante des umſchriebenen 4flachs iſt:

= 3 mal die Gere des eingeſchriebenen Würfels. AB = 3 ab

= 2 mal die Kantenaxe oder Kante des eingeſchriebenen 8flachs. AB = 2 fh.

= 3 mal die Linie, welche eine 3kantige Ecke des Rauten12flachs rechtwinklig durch die 4kantige Axe mit der gegenüber liegenden 3kantigen Ecke verbindet (AB = 3 ab) oder = 3 langen Geren des 12flachs.

= 3 mal die Linie, welche eine 3kantige Leuzit-

ecke rechtwinklig durch die Hauptaxe mit der gegenüber liegenden 3kantigen Ecke verbindet. BA = 3 ab.

Da die Sere eines in ein 8flach eingeſchriebenen Würfels $\frac{2}{3}$ der Kante des umſchriebenen 8flachs beträgt, ſo wird ſich gegenwärtiger dem 4flach eingeſchriebene Würfel, deſſen 3fache Sere = 2en Kanten des demſelben 4flach eingeſchriebenen 8flachs, in dieſes 8flach einſchreiben laſſen.

3 ab = AB

2 fh = AB alſo

3 ab = 2 fh

ab = $\frac{2}{3}$ fh.

b. Die Axe des umſchriebenen 4flachs iſt das Doppelte der Axe des eingeſchriebenen Würfels, der Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs, der 3kantigen Axe des eingeſchriebenen Rauten12flachs und Leuzits.

c. Die Kantenaxe des umſchriebenen 4flachs iſt = der Axe des 8flachs. gC = gC

= 3 mal die Kante des Würfels. gC = 3 eb.

= $\frac{3}{2}$ der 4kantigen Axe des Rauten12flachs gC = $\frac{6}{4}$ = $\frac{3}{2}$ ik.

= $\frac{3}{2}$ der Hauptleuzitaxe. gC = $\frac{3}{2}$ ik.

Wie ſich der eingeſchriebene Würfel in das eingeſchriebene 8flach einſchreiben läßt, eben ſo in das eingeſchriebene 12flach und in den Leuzit. Das 12flach läßt ſich auch in den Leuzit einſchreiben, 12flach und Leuzit aber in das 8flach. Siehe die Fig. 39.

2. Die Kante des eingeſchriebenen 4flachs iſt
= der Gere des umſchriebenen Würfels. ab = ab
= $\frac{2}{3}$ der Kante des umſchriebenen 8flachs. ab
= $\frac{2}{3}$ fh.
= der Linie von einer 3kantigen Ecke des 12flachs rechtwinklig durch die 4kantige Axe zur gegenüber liegenden Ecke. ab = ab.
= der Linie von einer 3kantigen Leuzitecke rechtwinklig durch die Hauptaxe zur gegenüber liegenden 3kantigen Leuzitecke. ab = ab.

Die umſchriebenen 4 Körper ſind einerlei mit den eingeſchriebenen, haben alſo gleiche Verhältniſſe unter einander.

Das eingeſchriebene 4flach verhält ſich zum umſchriebenen bei allen 4 Körpern gleich, nämlich ſo daß jede Linie des eingeſchriebenen $\frac{1}{3}$ der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen.

Und eben dies Verhältniß zeigt jeder der 4 um ein 4flach beſchriebenen Körper zu dem ihm ähnlichen in daſſelbe 4flach beſchriebenen.

§. 20.

Widerſpricht die Verwandtſchaft des 4flachs mit der Würfelſippe dem Geſetze des Ebenmaaßes?

Dies Geſetz lautete: wenn man Eine Fläche, Kante oder Ecke eines Körpers auf beſtimmte Weiſe verändert — abſtumpft, zuſchärft, zuſpitzt — ſo müſſen alle

gleichartigen Flächen, Kanten und Ecken deſſelben Körpers auf gleiche Weiſe verändert werden.

Betrachten wir nun die Uebergänge aus dem Würfel, 8flach, Rauten12flach und Leuzit in das 4flach, ſo widerſprechen dieſe ſcheinbar jenem Geſetze, indem immer nur die Hälfte von 8 gleichartigen Ecken oder Flächen dieſer 4 Körper bei ihrer Verwandlung in ein 4flach verändert wird. Das 4flach verhält ſich hierbei wie ein halbes 8flach.

Allein bei umgekehrter Anſicht der Verwandlung beſteht jenes ſchöne Geſetz, wenn man nämlich darauf ſieht wie das 4flach in jene 4 Körper übergeht. In den Würfel durch Abſtumpfung aller ſeiner Kanten, in das 8flach durch Abſtumpfung aller ſeiner Ecken, in das 12flach durch Zuſpitzung aller ſeiner Ecken, in den Leuzit durch Zuſpitzung aller Ecken und Zuſchärfung aller Kanten.

Zuſätze.

A. Das Pyramiden4flach.

Wir ſahen daß der Leuzit aus dem 4flach entſteht durch vereinte Zuſchärfung der Kanten und Zuſpitzung der Ecken. Schärft man nur die Kanten zu, und zwar bis je 3 Zuſchärfungsflächen in jeder Flächenmitte des 4flachs eine 3kantige Ecke bilden, ſo entſteht das Pyramiden4flach [20]).

20) Aus dem Würfel entſteht es durch 3flächige Zuſpitzung von 4 den Flächen des 4flachs entſprechenden Ecken. Die Zuſpitzungen ſind aufgeſetzt, wie beim Uebergang aus dem Würfel in

Beträgt der Winkel der Zuſchärfungskante 110°, ſo iſt das Pyramiden4flach als ein halber Leuzit zu betrachten.

Es läßt ſich aber eine Reihe verſchiedener Pyramiden4flache bilden. Am einen Ende würde das ſtehen, deſſen Zuſchärfungskantenwinkel nur um ein Geringſtes größer als 70° wäre — als der Winkel der zugeſchärften 4flachkante. — Am andern Ende ſtände eins, deſſen Zuſchärfungskantenwinkel nur um ein Geringſtes kleiner als 2 Rechte. Betrüge er 2 Rechte, ſo vereinten ſich je 2 Zuſchärfungsflächen einer Kante in Eine Abſtumpfungsfläche — eine Würfelfläche.

So denken wir uns jene Reihe Pyramiden4flache aus dem 4flach (dem umſchriebenen) durch Hinwegnahme, durch Zuſchärfen erzeugt. Wir können ſie aber auch aus dem (eingeſchriebenen) 4flach durch Hinzufügen bilden. Setzen wir nämlich auf jede Fläche des 4flachs eine 3ſeitige Pyramide. Die Grundkantenwinkel und Axen der möglichſt ſtumpfen Pyramide müſſen größer als 0, die Pyramidenkanten länger als $\frac{1}{3}$ der Höhenlinie der 4flachs△e, jeder ihrer Winkel kleiner als 2 Rechte, jeder der 3 Winkel an der Spitze kleiner als 120° ſeyn. Jeder Grundkantenwinkel der möglichſt ſpitzen Pyramide muß kleiner als 55° ſeyn (weil $70° + 2 \times 55° = 180°$).

Jeder

den Leuzit. (So beim Borazit, Hauy. Tafel 33. Fig. 93 die Flächen r.)

Aus dem 8flach erzeugt man es durch Zuſchärfung der Ecken, (welche ja den 4flachkanten entſprechen) die Zuſchärfungsflächen auf die Flächen des 8flachs aufgeſetzt ꝛc.

Jeder Polkantenwinkel ſey größer als ein Rechter, und eben ſo jeder Flächenwinkel an der Spitze. Die Axe ſey nicht völlig $\frac{1}{2}$ der 4flachsaxe. Setzt man auf jede Fläche des 4flachs eine 3ſeitige Pyramide deren Axe $\frac{1}{2}$ der 4flachsaxe, deren Grundkantenwinkel 55°, der Polkanten- und Polflächenwinkel aber 90°, ſo erhält man einen Würfel.

Wenn nun das Pyramiden4flach, deſſen Zuſchärfungskante 110° beträgt, als ein halber Leuzit angeſehn werden muß, ſind dann nicht alle übrigen Pyramiden-4flache der angegebenen Reihe als Halbkörper von Leuzit ähnlichen Geſtalten zu betrachten? [21])

§. 22.

B. Das Rauten12flach mit zugeſchärften 4kantigen Ecken.

Aus dem Rauten12flach würde das Pyramiden-4flach, deſſen Zuſchärfungskante 110° — der ächte Halbleuzit — entſtehen, wenn man, ſtatt 24 Kanten abzuſtumpfen, was den vollſtändigen Leuzit erzeugt, nur 12 abſtumpfte. Und zwar 4 × 3 welche in den 4 3kantigen 12flachsecken zuſammentreffen, die den Ecken des dem 12fach eingeſchriebenen oder den Flächenmitten des ihm umſchriebenen 4flachs entſprechen.

21) Zwei 4flache von gleicher Größe. Setze die 4 Pyramiden, in welche das eine zerlegt wird, auf die 4 Flächen des zweiten. Das ſo entſtandene Pyramiden4flach hat 6 Kanten von (70° + 2 × 35°) = 140° 4 × 3 Kanten von 120°. Flächenwinkel 110° und 35°. —

Bayerische Staatsbibliothek München

Giebt man ſtatt die bezeichneten 12 Kanten regelmäßig abzuſtumpfen den Abſtumpfungsflächen ſtärkere Neigung gegen die 4kantige Axe als die abgeſtumpften Kanten ſelbſt haben, ſo entſteht das hier in Rede ſtehende 12flach mit zugeſchärften 4kantigen Ecken, welches bei der Blende vorkommt [22]).

Beſtimmen wir dieſe Zuſchärfung genauer. Aus jedem der 4 × 3 ſtumpfen Rautenwinkel die um die 4 oben bezeichneten 3kantigen Ecken des 12flachs liegen; fälle 2 ſenkrechte Linien auf 2 gegenüber liegende Kanten Fig. 40 Fig. 40. Aus dem ſtumpfen Winkel AEA′ fälle x und y. ſenkrecht auf AE′ und A′E′. Es werden nun je 2 ſolcher aus 2 benachbarten Rautenwinkeln gefällte Linien (y und z) beſtimmen, wie die zwiſchen ihnen liegende Kante EA′ abzuſchneiden ſey.

Jede 12flachsraute wird durch 2 ſolcher Schnitte in ein Trapez (EDE′F) verwandelt, das einen (unveränderten) Winkel von 110°, 2 von 90° und einen von 70° hat. Letzterer iſt ſo groß als der verſchwundene ſpitze Rautenwinkel.

Man halte ein ſo zugeſchärftes 12flach ſo, daß eine 3kantige Ecke oben, eine 6kantige unten. Dann werden die 3 obern Zuſchärfungskanten als 3 nach oben zu gegen einander geneigte Pyramidenkanten des 4flachs erſcheinen, die 3 untern Zuſchärfungskanten, welche in einer Ebene liegen, ſo die ſenkrechte Axe des 12flachs rechtwinklig ſchneidet, erſcheinen als zugeſchärfte Grundkanten

22) Vergleiche Hauy. Kupfertafel 87 Fig. 197. Von Hauy rühren die nähern Beſtimmungen dieſes 12flachs her.

deſſelben 4flachs. Dieſe 12 Zuſchärfungsflächen ſo vergrößert, daß die Flächen des 12flachs ſchwänden, würden nun ein Pyramiden4flach erzeugen, deſſen Zuſchärfungskante ſtumpfer als 110° (129° nach Hauy) das alſo nicht als Halbkörper des ächten Leuzits, ſondern nur eines Leuzit ähnelnden Körpers anzuſehn wäre.

§. 23.

C. Das Rauten12flach, deſſen 4kantige Ecken mit 4 Flächen zugeſpitzt ſind, die Zuſpitzungsflächen auf die Kanten aufgeſetzt.

Regelmäßige Abſtumpfung der 12flachskanten erzeugt den Leuzit. Neigen ſich die Abſtumpfungsflächen ſtärker gegen die 4kantige Axe, als die abgeſtumpften Kanten; m. a. W. ſpitzt man jede 4kantige Ecke mit 4 Flächen zu, die Zuſpitzungsflächen auf die Seitenkanten aufgeſetzt, ſo entſteht ein Leuzit ähnlicher Körper, deſſen Hauptecken ſtumpfer als beim ächten Leuzit ſind.

Ein ſolches zugeſpitztes Rauten12flach führt Hauy (beym Pleonaste) Tafel 50 Fig. 104 an, und iſt Fig. 41 abgebildet. Je 2 an der Zuſpitzungsecke einander gegenüber liegende Zuſpitzungsflächen neigen ſich unter etwa 129½° gegen einander — alſo unter demſelben Winkel wie je 2 Zuſchärfungsflächen des (Blende) Rauten12flachs mit zugeſchärften 4kantigen Ecken. Hieraus folgt:

Fig. 41. a. Jede von einer Zuſpitzungsfläche und einer Fläche des 12flachs gebildete Kante (rg) würde mit Fig. 41

der ihr gegenüber liegenden 12flachskante (x) einen rechten Winkel bilden.

b. 4 jener Kanten, welche um eine 12flachsraute liegen (2 rg und 2 r′g) erzeugen, ſobald je 2 in einer 3kantigen Ecke des 12flachs zuſammenſtoßen, eine zweite Raute, welche der urſprünglichen 12flachsraute ähnlich, und deren lange Gere mit der kurzen Gere des 12flachs zuſammen fällt.

Fig. 42 Fig. 42. abcd eine 12flachsraute. ebhd iſt die Geſtalt welche die Raute bei Zuſchärfung der 4kantigen Ecke erhält, da nur aus Einem ſtumpfen Winkel ſenkrechte Linien auf die gegenüber liegenden Kanten gefällt werden.

Fig. 43 Fig. 43. zeigt wie bei der in Rede ſtehenden 4flächigen Zuſpitzung der 4kantigen Ecken, 2 und 2 Linien aus beiden ſtumpfen Rautenwinkeln ſenkrecht auf die gegenüber liegenden Kanten gefällt werden, und hieraus die neue Raute bkdi entſpringt, welche der Raute abcd ähnlich, deren lange Gere aber mit der kurzen Gere von abcd eins iſt.

So hätten wir hier einen Leuzit ähnelnden Körper und das Geſetz ſeiner Bildung.

Beim Bleiglanz findet ſich (Hauy, Tafel 66 Fig. 36.) ein 8flach deſſen Ecken mit 4 Flächen zugeſpitzt ſind, die Zuſpitzungsflächen auf die Flächen des 8flachs aufgeſetzt. Wäre der Winkel den die Zuſpitzungsflächen mit den Flächen des 8flachs bilden 160°, ſo gienge, wie wir ſahen, hieraus der ächte Leuzit hervor. Jener Winkel beträgt aber $150\frac{1}{2}$°, daher die Zuſpitzung ſtumpfer, und der aus derſelben erwachſende Leuzit ähnelnde Körper

ſtumpfere Hauptecken hat, als der ächte Leuzit. Eine leichte Berechnung zeigt aber, daß der Winkel, unter welchem 2 einander an der Zuſpitzungsecke gegenüber liegende Zuſpitzungsflächen zuſammenſtoßen ungefähr $129\frac{1}{2}^{\circ}$ ſey, daß alſo der Leuzitähnelnde Körper, welcher aus dieſer Zuſpitzung des 8flachs hervorgeht mit demjenigen einerlei iſt, der aus der eben betrachteten Zuſpitzung der 4kantigen Ecken des Rauten12flachs entſpringt.

§. 24.

D. Reihe Leuzit ähnelnder Körper.

Wie wir eine Reihe von Halbleuziten — Pyramiden4flachen — aus verſchiedenwinkliger Zuſchärfung der Kanten eines 4flachs entſpringen ſahen, ſo können wir uns nun eine Reihe vollſtändiger Leuzitähnelnder Körper aus verſchiedener Zuſpitzung der 6 oder 8 Ecken des 12flachs, der Ecken des 8flachs und Würfels bilden. Der ächte Leuzit entſpringt aus regelmäßiger Abſtumpfung der 12flachskanten.

Leuzit ähnelnde Körper mit ſtumpferen Hauptecken, ſpitzeren 3kantigen Ecken, gehn aus (der ſchon betrachteten) 4flächigen Zuſpitzung der 4kantigen Ecken hervor. Der Winkel den 2 einander an der Zuſpitzungsecke gegenüber liegende Zuſpitzungsflächen mit einander bilden, muß größer als 110°, kleiner als 180° ſeyn. Der Winkel den eine ſo erzeugte Leuzitfläche mit der 3kantigen Leuzitaxe macht, muß kleiner als 70° ſeyn — als der Winkel den die 12flachskante mit der 3kanti-

gen 12flachsaxe bildet — aber größer als 35° — als der Winkel der Würfelgere mit der Würfelaxe.

Leuzitähnelnde Körper deren 6 Hauptecken ſpitzer, die 8 3kantigen Ecken ſtumpfer als beim ächten Leuzit, entſtehn aus 3flächiger Zuſpitzung der 3kantigen Ecken des 12flachs, die Zuſpitzungsflächen auf die Kanten aufgeſetzt. Eine ſo erzeugte Leuzitfläche bildet mit der 3kantigen Leuzitaxe einen Winkel der größer als 70°, — als der Winkel der 12flachskante mit der 3kantigen 12flachsaxe — kleiner als 90° — als der Winkel den die Abſtumpfungsfläche der 3kantigen Ecke mit derſelben Axe macht. Der Winkel den 2 Flächen dieſes Leuzits an einer Hauptecke bilden, muß etwas kleiner als 110° ſeyn, und etwas größer als 70° — kleiner als der Winkel den 2 Kanten des 12flachs an der 4kantigen Ecke des 12flachs machen, größer als der Winkel den 2 ausgebildete Abſtumpfungsflächen der 3kantigen Ecken — 2 Flächen des 8flachs — mit einander an der 4kantigen Ecke des 12flachs bilden würden.

Bilden wir nun dieſe Reihe Leuzit ähnelnder Körper aus dem 8flach. Bei der ſpitzeſten 4flächigen Zuſpitzung der 8flachecken, müſſen 2 an einer Hauptecke einander gegenüber liegende Leuzitflächen einen Winkel bilden der etwas größer als 70°, als der Winkel den 2 einander an einer Ecke gegenüber liegende Flächen des 8flachs bilden.

Mit der 3kantigen Leuzitaxe wird eine ſolche Zuſpitzungsfläche einen Winkel machen, der nur etwas größer als 90° iſt, als der Winkel den die Fläche des 8flachs mit der Flächenaxe macht.

Bei der ſtumpfeſten Zuſpitzung muß der Winkel, den 2 Zuſpitzungsflächen an einer Hauptleuzitecke bilden, grö=ßer als 180° ſeyn, weil ſonſt alle 4 Zuſpitzungsflächen in eine Fläche — Würfelfläche — zuſammen fielen. Mit der 3kantigen Leuzitaxe muß die Fläche der ſtumpfeſten Zuſpitzung einen Winkel machen der größer als 35°, als der Winkel den die Würfelgere mit der Würfelaxe bildet.

Wie die Reihe Leuzitähnelnder Körper aus dem Würfel zu bilden ſey, iſt aus Vergleichung mit dem Ge=ſagten leicht zu finden.

Der aus regelmäßiger Abſtumpfung der 12flachs=kanten erzeugte Leuzit, ſteht an der Spitze aller ihm ähnelnden Körper. Daß ſich unter dieſen ſolche finden, welche nach beſtimmter Regel aus dem Würfel, 8flach und Rauten12flach entſtehn, dieſen geſetzlich verwandt ſind, ſahen wir an einem Beiſpiele. Es gilt, alle geſetz=lichen Familienglieder aufzufinden.

§. 25.

E. Der Pyramidenwürfel.

A. Der eingeſchriebene.

Schärft man die Kanten des Würfels zu, und zwar bis je 4 Zuſchärfungsflächen in den Flächenmitten des Würfels eine 4kantige Ecke bilden, ſo entſteht ein Pyra=midenwürfel.

Er hat 24 Flächen (12 × 2 Zuſchärfungsflächen oder auch 6 × 4 Pyramidenflächen) 12 Zuſchärfungs=kanten, die den Kanten des Würfels ⋕ ſind, und 6 × 4

Pyramidenkanten. An 8 6kantigen Ecken welche in die Axen des Würfels fallen, ſtoßen je 3 Zuſchärfungs- und 3 Pyramidenkanten zuſammen, 6 4kantige Ecken erſcheinen als Spitzen der Pyramiden, und fallen in die Flächenmitten des umſchriebenen Würfels.

B. Der umſchriebene.

Schneidet man die 6 Pyramiden des Pyramidenwürfels jede durch 4 ein Geviert bildende Grundkanten ab, ſo erhält man den dem Pyramidenwürfel eingeſchriebenen Würfel. Deſſen Kanten und Ecken fallen demnach mit 12 Kanten und 8 6kantigen Ecken des Pyramidenwürfels zuſammen.

* * *

Wir können uns nun eine Reihe ſolcher Pyramidenwürfel denken. Am einen Ende der Reihe würde ein Pyramidenwürfel ſtehn, deſſen Zuſchärfungskantenwinkel nur um ein Geringſtes größer wäre als ein rechter, als der Würfelkantenwinkel; am andern Ende einer deſſen Zuſchärfungskantenwinkel nahe 2 Rechten.

Fig. 44 Fig. 44. abc Durchſchnitt einer Würfelkante. adc und aec können die Aeußerſten der Zuſchärfung vorſtellen. Betrüge die Zuſchärfungskante 2 Rechte = ac, ſo wäre ſie regelmäßige Abſtumpfung der Würfelkante, aus welcher bekanntlich das Rauten12flach entſpringt.

Betrachten wir den (umſchriebenen) Pyramidenwürfel als dadurch entſtanden, daß auf jede Würfelfläche eine 4ſeitige Pyramide aufgeſetzt wird. Der möglichſt ſtumpfen Pyramide Grundkantenwinkel würde, ſo

wie ihre Axe, faſt 0, jeder Flächenwinkel an der Spitze würde faſt ein Rechter, die Pyramidenkante wenig grö-ßer als eine halbe Würfelaxe ſeyn. Die Winkel der 12 Kanten in welchen je 2 Flächen 2er benachbarten Pyramiden zuſammenſtießen, würden nur um ein Geringes größer als die Würfelkantenwinkel ſelbſt — als ein Rechter — ſeyn.

Am andern Ende ſteht der ſpitzeſte Pyramidenwürfel, deſſen Pyramide nur um ein Geringſtes ſtumpfer wäre als eine der 6 Pyramiden, welche dem Würfel aufgeſetzt, das Rauten12flach erzeugen. Die Winkel der Grundkanten müßten alſo um etwas kleiner als 45° ſeyn, damit nicht 2 Grundkanten 2er aneinander grenzenden Pyramiden mit der Würfelkante 2 Rechte betrügen, und 2 Pyramidenflächen daher eine Fläche bildeten.

Eben ſo dürfte die Axe der Pyramide der Hälfte der Würfelkante nicht gleich kommen, jeder der 4 Flächenwinkel an der Pyramidenſpitze müßte größer als 70° ſeyn, jeder Pyramidenkantenwinkel größer als 120°.

Pyramidenwürfel würden auch gebildet

1. Durch Abſtumpfung der 6 × 4 längern Leuzitkanten[23]).

Fig. 45. Die Flächen c ſind Flächen des Pyramidenwürfels. Denkt man ſich bei dieſer Figur 6 4kantige von c gebildete Ecken abgeſtumpft, ſo ſind die Abſtumpfungsflächen Würfelflächen. Es könnte nun c einmal gegen die Fläche des Rauten12flachs (P) ſo ſtark geneigt ſeyn, daß ſie faſt mit dieſer zuſammenfiele, das gä- Fig. 45

23) Findet ſich beim Granat. Siehe Hauy, Tafel 46, Fig. 59, welche Figur von mir (Fig. 45.) entlehnt iſt.

be den möglich ſpitzeſten Pyramidenwürfel. Der ſtumpfſte würde gebildet, wenn nur ein Geringſtes fehlte, daß c mit der Würfelfläche zuſammenfiele, oder rechtwinklig die Hauptleuzitaxe ſchnitte [24]).

2. Entſteht der Pyramidenwürfel durch Zuſpitzung der 4kantigen Ecken des Rauten12flachs, die Zuſpitzungsflächen auf die Seitenflächen aufgeſetzt [25]).

3. Aus dem 8flach würde der Pyramidenwürfel entſtehn durch Zuſpitzung der Ecken, die Zuſpitzungsflächen auf die Kanten aufgeſetzt.

§. 26.

F. Das Pyramiden8flach.

A. Das eingeſchriebene.

Schärft man die Kanten eines 8flachs zu, bis je 3 Zuſchärfungsflächen in der Mitte eines 8flach△s eine 3kantige Ecke bilden, ſo entſteht das Pyramiden8flach.

Es hat 24 Dreiecke. 12 seiner Kanten laufen als Kanten einer regelmäßigen Zuſchärfung # mit den Kanten des umſchriebenen 8flachs. 8 × 3 Kanten gehören 8

24) Aus §. 31 wird ſich ergeben, daß aus 12 und 12 beſtimmten mit c bezeichneten Flächen der Fig. 46 — d. i. 12 und 12 Flächen des Hauptpyramidenwürfels — 2 Kies12flache gebildet werden können. Vergleiche: Beſchreibung einer Zwillingskryſtalliſation des Schwefelkieſes, vom Profeſſor Weiß, im Magazin der Geſellſ. Naturforſchender Freunde zu Berlin. Achter Band.

25) Findet ſich beim Queckſilberamalgam und Granat.

3ſeitigen Pyramiden an. 6 3 und 3kantige Ecken fallen in die 3 Axen des 8flachs, 8 3kantige Ecken in die Flächenmitten des 8flachs.

B. Das umſchriebene.

Schneidet man 8 3ſeitige Pyramiden des Pyramidenflachs durch je 3 Grundkanten ab, ſo erhält man das eingeſchriebene 8flach. Deſſen Axen ſind alſo eins mit den 6kantigen Axen des Pyramiden8flachs, ſeine Kanten eins mit 12 Kanten des Pyramiden8flachs.

* * *

Wir können uns hier — wie bei Betrachtung des Pyramidenwürfels — eine Reihe von Pyramiden8flachen denken. An einem Ende wäre der Winkel einer der 12 Zuſchärfungskanten nur um ein Geringſtes größer als der Kantenwinkel des 8flachs — als 110° —; am andern Ende wäre er nur um ein Geringſtes kleiner als 2 Rechte. Betrüge er 2 Rechte, ſo bildeten je 2 Zuſchärfungsflächen eine Abſtumpfungsfläche der Kante — eine Fläche des Rauten12flachs.

Oder betrachten wir das (umſchriebene) Pyramiden8flach als ſo erzeugt, daß auf jede Fläche des 8flachs eine 3ſeitige Pyramide aufgeſetzt würde. Die Grundkantenwinkel und die Axe der möglichſt ſtumpfen Pyramide würde faſt 0, ihre Pyramidenkanten faſt mit $\frac{2}{3}$ Höhenlinien der 8flachsdreiecke zuſammenfallen, die Flächenwinkel an ihrer Spitze faſt 120° ſeyn.

Der Grundkantenwinkel der möglichſt ſpitzen Pyramide würde dagegen kleiner als 35° ſeyn, weil

$2 \times 35^\circ + 110^\circ$, (dem Kantenwinkel des 8flachs) $= 180^\circ$. In dieſem Falle bilden aber je 2 Flächen 2 benachbarter Pyramiden Eine Fläche, und es entſteht das Rauten12flach. Der Pyramidenkantenwinkel würde eben ſo unter 120° ſeyn müſſen, der Flächenwinkel an der Pyramidenſpitze über 110°.

Aus dem Würfel erhält man das Pyramiden8flach durch 3flächige Zuſpitzung der Ecken, die Zuſpitzungsflächen auf die Kanten aufgeſetzt; aus dem Rauten12flach durch 3flächige Zuſpitzung der 3kantigen Ecken, die Zuſpitzungsflächen auf die langen Geren aufgeſetzt; — aus dem Leuzit durch Abſtumpfung der 8×3 kürzern Kanten, welche Abſtumpfung einerſeits in Zuſpitzung der 8 3kantigen Ecken, andrerſeits in Zuſpitzung der 12 ungleich 4kantigen überſchlüge.

§. 27.

G. Das Pyramidenrauten12flach oder 48flach.

A. Das eingeſchriebene.

Schärft man die Kanten des Rauten12flachs zu, bis je 4 Zuſchärfungsflächen in einer Rautenmitte eine 4kantige Ecke bilden, ſo entſteht das 48flach. Es hat 24×2 (Zuſchärfungs-) oder 12×4 (Pyramiden-) Flächen. Indem je 4 Zuſchärfungsflächen im Mittelpunkt der 12flachsraute zuſammentreffen, bilden ſie eine 4ſeitige Pyramide mit rautenförmiger Grundfläche, 2 gegenüber liegenden kürzern und 2 gegenüber liegenden

längern Pyramidenkanten. Es entſtehn nun 12 ſolcher Pyramiden. Dieſe haben 12 × 2 längere, 12 × 2 kürzere Pyramidenkanten. Hierzu kommen 24 Zuſchärfungskanten, macht in Allem 72 Kanten. — 12 4kantige Ecken treffen in die Flächenmitten des zugeſchärften 12flachs, 6 8kantige Ecken fallen in die 4kantigen, 8 6kantige Ecken in die 3kantigen Axen des zugeſchärften 12flachs.

B. Das umſchriebene.

Schneidet man 12 4kantige Ecken des Pyramiden-12flachs durch je 4 umgebende Grundkanten weg, ſo entſteht das Rauten12flach, deſſen Kanten mit den 24 Kanten zuſammen fallen, durch welche die Schnitte gehn, deſſen 6 4kantige Ecken den 6 8kantigen, deſſen 8 3kantige Ecken den 8 6kantigen des 48flachs entſprechen.

* * *

Man kann ſich nun eine Reihe ſolcher 48flache denken. An einem Ende ſtände das durch die möglich ſchärfſte, am andern Ende das durch die möglich ſtumpfſte Zuſchärfung entſtandene. Die Zuſchärfungskante des erſtern würde nur um ein Geringſtes ſtumpfer ſeyn als die 12flachskante, als 120°, die Kante des letzteren dürfte nicht volle 180° betragen, weil ſonſt 2 Zuſchärfungsflächen in eine Abſtumpfungsfläche — eine Leuzitfläche — zuſammenfielen.

Oder man denkt ſich, das 12flach werde durch Aufſetzen einer 4kantigen Pyramide auf jede Raute in das 48flach verwandelt. Der Grundkantenwinkel und die

Axe der möglichſt ſtumpfen Pyramide würden ein Geringſtes über 0, die 2 und 2 Pyramidenkanten nur wenig länger als 2 lange und 2 kurze halbe Rautengeren, jeder der 4 Flächenwinkel an der Spitze faſt ein Rechter ſeyn. —

Der Grundkantenwinkel der möglich ſpitzeſten Pyramide dürfte nicht volle 30° betragen. Betrüge er 30°, ſo würden 2 ſolche Winkel mit den Kantenwinkel des 12flachs vereint (2 × 30° + 120°) 180° betragen, und 2 Flächen 2er benachbarten Pyramiden in Eine Fläche — Leuzitfläche — zuſammenfallen. — Die Axe der Pyramide dürfte nicht völlig $\frac{1}{6}$ der Flächenaxe (oder langen Gere) des 12flachs ſeyn. (Vergleiche Fig. 23.)

Aus dem Würfel würde das 48flach erzeugt durch Zuſpitzung jeder Ecke mit 6 Flächen. 3 Kanten jeder Zuſpitzung, welche an 3 Würfelgeren gränzen, müſſen mit 3 Würfelaxen gleich laufen, und regelmäßig abgeſtumpft Leuzitflächen geben. Man nehme den Würfel mit abgeſtumpften Kanten, und ſchärfe deſſen Anfänge von 24 Kanten des Rauten12flachs zu, ſo erhält man eine ſolche 6flächige Zuſpitzung.

Aus dem 8flach entſteht das 48flach durch 8flächige Zuſpitzung der Ecken. Jede Zuſpitzungskante welche als Fortſetzung einer Dreieckshöhenlinie erſcheint, muß mit der ihr gegenüber liegenden Fläche des 8flachs einen rechten Winkel bilden, und regelmäßig abgeſtumpft die Leuzitfläche geben. Man nehme ein 8flach mit abgeſtumpften Kanten, ſchärfe deſſen Anfänge von 24 Kanten des 12flachs regelmäßig zu, ſo erhält man die Zuſpitzung.

Aus dem Leuzit entſteht das 48flach durch 4flächige Zuſpitzung der 12 ungleich 4kantigen Ecken, die Zuſpitzungsflächen auf die kurzen Geren aufgeſetzt.

Ueberblicken wir nun die Verhältniſſe des 48flachs zu den 4 Hauptkörpern — zum Würfel, 8flach, Rauten-12flach und Leuzit.

8 6kantige Ecken fallen mit den Ecken des eingeſchriebenen Würfels und den 3kantigen Ecken des eingeſchriebenen 12flachs, 6 8kantige Ecken mit den Ecken des eingeſchriebenen 8flachs und den 6 4kantigen Ecken des eingeſchriebenen 12flachs zuſammen. 12 4kantige Ecken entſprechen den 12 ungleich 4kantigen Ecken des eingeſchriebenen Leuzits. Man erhält dieſen durch Abſtumpfung der 8 × 3 längern Kanten, welche in den 6kantigen Ecken zuſammentreffen. 6 und 8kantige Ecken des 4flachs werden natürlich hierdurch weggeſchnitten.

Die Flächenmitten des umſchriebenen Würfels fallen mit den 6 8kantigen Ecken, die Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs mit den 8 6kantigen, die Flächenmitten des umſchriebenen 12flachs mit den 12 4kantigen Ecken zuſammen. 24 kürzere Geren des umſchriebenen Leuzits ſind eins mit den 24 längſten Kanten des 48flachs, daher 6 Hauptecken des Leuzits mit 6 8kantigen, 8 3kantige Leuzitecken mit 8 6kantigen des 48flachs zuſammenfallen.

Man denke 4 in einer Ebene liegende 8kantige Ecken des 48flachs durch 4 Linien verbunden, ſo bilden dieſe 4 Linien ein Geviert, welches dem Geviert von 4 in

einer Ebene liegenden Kanten des eingeſchriebenen 8flachs oder 4 in einer Ebene liegenden langen Geren des eingeſchriebenen 12flachs entſpricht.

Hält man das 48flach zwiſchen eine ſenkrechte 6kantige Axe, ſo ſind 6 ſeiner längern Kanten welche 6 Kanten des 12flachs oder 6 kürzeren Geren des Leuzits entſprechen, auch ſenkrecht, der ſenkrechten Axe # [26]).

C. Die Nebenſippe des Kies-12flachs.

§. 28.

1) Würfel und Kies12flach.

A. Das eingeſchriebene 12flach.

Die regelmäßige Abſtumpfung der Würfelkanten führt in das Rauten12flach. Bei Abſtumpfung einer einzelnen Kante ſchneidet man hierbei eine 3ſeitige Säule ab, deren Endflächen gleichſchenklige rechtwinkliche △e.

Fig. 46 Fig. 46. Durchſchnittsfläche durch die Mitten ABCD 4 #er Würfelkanten. Die △e abA, bcB, dcD, aCd. In dieſen iſt aA = Ab = bB = Bc ꝛc. Man kann

26) Das 48flach iſt angedeutet beim Granat im Rauten12flach mit zugeſchärften Kanten. Ja 2 48flache, da doppelt zugeſchärfte Kanten vorkommen. — Dann beim Flußſpathwürfel mit 6flächig zugeſpitzten Ecken. — Zuletzt gehört das 48flach des Diamant hierher, vielleicht der König des Würfelgeſchlechts.

kann die Würfelkanten auch ſchief abſtumpfen, ſo daß man rechtwinklige Säulen abſchneidet, deren Endflächen ungleichſchenklige rechtwinklige Dreiecke. Als ſolche Endflächen wären anzuſehn eAb, iAb, bBk, bBf ꝛc.

Je 2 regelmäßige Abſtumpfungsflächen der Würfelkanten ſchneiden ſich in einer Linie welche jede Würfelfläche #, 2 #en Kanten hälftet, unter rechten Winkeln. Winkel abc = bcd = 1 Rechten.

Bei einer ſchiefen Abſtumpfung der Würfelkanten, welche der regelmäßigen am nächſten ſteht — bei eAb, fbB ꝛc. iſt Ae nur um ein Geringes kleiner als Ab, fB als bB. Der Winkel ebf iſt nur um Weniges größer als ein Rechter.

Bei ſchiefer Abſtumpfung der Würfelkanten, welche am meiſten von der regelmäßigen abweicht — bei iAb, bBk ꝛc. — ſind die Schenkel iA oder kB faſt 0, die Hypotenuſen ib, kb ſind nur um ein Geringes länger als die Katheten Ab und Bb. Der Winkel ibk beträgt faſt 2 Rechte. So überblicken wir die Reihe ſchiefer Abſtumpfungen.

Stumpfen wir nun alle 12 Würfelkanten ſchief ab, und zwar ſo, daß die Abſtumpfungsflächen 2er #en Kanten deſſelben Würfelgevierts ſich zu einander neigen und ſich berühren, ſo läßt ſich dies anſehn als würden alle Würfelflächen zugeſchärft.

Die Zuſchärfungen ſeyen nun der Art, daß je 2 Zuſchärfungskanten 2er #en Flächen #, und die 3 Schnittebenen, welche zwiſchen den 3 Paaren #er Zuſchärfungs-

kanten liegen, ſich unter rechten Winkeln ſchneiden, und ſo 3 Paar #en Würfelflächen gleich laufen.

Auf ſolche Weiſe erhalten wir, je nachdem die Zuſchärfung mehr oder minder ſtumpf, eine Reihe von 12flachen, deren Flächen 5ecke. In jedem dieſer 5ecke ſind 4 Seiten gleichartig, alſo unter ſich gleich, die 5te aber, welche der Zuſchärfungskante einer Würfelfläche entſpricht, iſt bald länger bald kürzer als die übrigen — nur in dem mathematiſch regelmäßigen 12flach iſt ſie ihnen gleich.

Aus dem über ſchiefe Abſtumpfung der Würfelkanten Geſagten ergiebt ſich: iſt die Zuſchärfung des Würfels möglichſt ſtumpf, ſo iſt die Zuſchärfungskante faſt ſo lang als die Würfelkante, ihr Winkel faſt 180°, ſo daß beide Zuſchärfungsflächen faſt mit den Würfelflächen zuſammenfallen.

Iſt die Zuſchärfung des Würfels möglichſt ſcharf, ſo iſt der Zuſchärfungskantenwinkel faſt 1 Rechter, die Zuſchärfungskante faſt 0. Der Körper ſteht dem Rauten12flach ganz nahe, da die 6 ſehr kurzen Zuſchärfungskanten an die Stelle der 6 4kantigen Ecken des Rauten12flachs treten.

In dieſer Reihe ſchiefer Abſtumpfungen der Würfelkanten ſind nun ſolche, bei welchen ſich das gegenſeitige Verhältniß zweier Katheten der rechtwinklig 3ſeitigen Endfläche der Abſtumpfungsſäule in Theilen der Würfelkante ausſprechen läßt. Wie Hauy bewieſen hat, gehört das regelmäßige 12flach nicht zu dieſen, wohl aber das 5eck 12flach, in welchem der Schwefelkies kryſtalliſirt, und das ich deshalb Kies12flach nennen will. Es geht hervor wenn man die Würfelkanten ſo abſtumpft,

daß in der rechtwinklig dreieckigen Endfläche der Abſtumpfungsſäule, die kürzere Kathete die Hälfte der längern iſt.

Hauy giebt folgende Anweiſung, das Kies12flach aus dem Würfel zu ſchneiden [27]).

Fig. 47. „Man macht zuförderſt einen Würfel, man zieht auf den Flächen dieſes Würfels Linien mn, m'n', m''n'', welche die Würfelflächen nach 3 ſich einander ſenkrecht ſchneidenden Richtungen jede in 2 Hälften theilen. Auf jeder ſolcher Linie wie mn nimmt man zu beiden Seiten ein Stück mo oder nr gleich $\frac{1}{4}$ der ganzen Linie [28]). Darauf legt man durch eben dieſe Linien zwei Schnittebenen, wovon die eine eine Tangentialebene am Punkte o', die andere an dem correſpondirenden Punkte der entgegengeſetzten Fläche ſeyn muß; zwei andere durch m''n'' gelegte Ebenen werden Tagentialebenen, die eine an dem Punkte r, die andere an dem correſpondirenden Punkte der entgegengeſetzten Fläche u. ſ. f. So bekömmt man 12 Schnittebenen, in der Zahl gleich der Zahl der Kanten welche ſie wegſchneiden, und dies giebt das geſuchte Dodekaeder." — Fig. 47

Das ſo entſtandene Kies12flach hat nun, wie wir wiſſen, 12 Fünfecke, jedes von 4 gleichen und einer ungleichen — längern — Seite begrenzt. Dieſe 12 län-

27) Hauy Lehrbuch der Mineralogie. Th. 4. S. 85.

28) Im Original und in der Ueberſetzung ſteht hier und an einem andern Orte $\frac{1}{8}$. Sollte nicht der eingeſchriebene Würfel mit dem umſchriebenen verwechſelt ſeyn?

gern Seiten ſind eins mit 6 Zuſchärfungskanten, die man **Hauptkanten** genannt hat. Man halte das 12flach zwiſchen 2 waagrechten Hauptkanten, oder zwiſchen einer ſenkrechten Hauptkantenaxe, die ich der Kürze halben **Hauptaxe** nennen werde. — Die 6 Hauptkanten werden von 6 Paar ungleichkantigen Ecken begrenzt. Auſſerdem hat es 8 gleich 3kantige Ecken, in welchen 8 × 3 gleiche Kanten zuſammenſtoßen. — Die Gere zwiſchen 2 gleich 3kantigen Ecken heiße die **Queergere**.

Fig. 48 Fig. 48. Durchſchnitt eines Würfels durch die Mitten 4 #er Kanten, und durch 2 #e Hauptkanten eh und gi des dem Würfel eingeſchriebenen Kies12flachs. Dieſe Linien eh und gi entſprechen Fig. 47. der Linien o′r′ und der ihr auf der #en Würfelſeite #en. f entſpricht dem Mittelpunkte c der Linie or, die Linie fg der Linie o′c, d. i. der Linie von der Mitte einer Hauptkante zu dem dieſer Kante gegenüber liegenden Winkel. Dieſe Linie heiße die **Hauptlinie**.

Fig. 48 zeigt nun, daß die Hauptkanten gi und eh ½ der der Würfelkante gleichen Linien bd und fk. Da aber fk Hauptaxe des Kies12flachs, ſo ergiebt es ſich daß die Hauptkante ½ der Hauptaxe.

B. **Das umſchriebene Kies12flach.**

Stumpfe die 12 Hauptkanten des Kies12flachs jede durch 4 ſie umgebende in einer Ebene liegende Queergeren ab, ſo entſteht der dem 12flach eingeſchriebene Würfel. Die Kanten dieſes Würfels fallen alſo mit den Queergeren, ſeine Ecken mit den 8 gleichkantigen Ecken, ſeine Axen mit den Axen dieſer Ecken des 12flachs zuſammen.

C. Es ſey ein Kies12flach um, eins in denſelben Würfel beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Es ſey ein Würfel um, einer in daſſelbe Kies12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zueinander?

Fig. 49. efghik Durchſchnitt eines in einen Würfel abcd eingeſchriebenen Kies12flachs. Ganz wie Fig. 48. Fig. 49

Den Durchſchnitt des um den Würfel abcd beſchriebenen 12flachs verzeichne ich ſo:

Durch die Punkte a, b, c, d ziehe ich Lk ⋕ ek, LG ⋕ fg, GM ⋕ gh, MK ⋕ ik. Die Seiten der ſo erhaltenen Raute LGMK hälfte ich in den Punkten E, F, H, I und ziehe die Linien EF und HI.

EFGHIK iſt Durchſchnitt des dem Würfel abcd umſchriebenen Kies12flachs.

Verlängere HI und FE. Durch den Punkt G ziehe eine Linie ⋕ bc bis ſie in B und C die verlängerten HI und FE trifft — gleicher Weiſe ziehe AD ⋕ ad durch K, ſo iſt ABCD Durchſchnitt des um das Kies12flach EFGHIK beſchriebenen Würfels [29]).

1. △ MGK ∾ △ MHI.

$$HI : GK = MH : MG = 1 : 2 \text{ oder } HI = \tfrac{1}{2}\, GK$$

29) Weiter unten wird es ſich ergeben, daß die Verzeichnung von Fig. 49 weit einfacher iſt, wenn man vom Durchſchnitt des äußern Würfels ABCD ausgeht, hierin auf angegebene Weiſe EFGHIK verzeichnet. Die Punkte abcd fallen in die Kreutzpunkte der Geren AC, BD und der Linien FG, GH, IK, KE u. ſ. w. Auch von der Raute LGML kann man ausgehn.

d. i. Die Hauptkante HI des umſchriebenen Kies=12flachs iſt $\frac{1}{2}$ von deſſen Hauptaxe GK, wie wir ſchon wiſſen.

2. $\triangle$ Ggc $\cong$ $\triangle$ ghc 1 Seite und 2 Winkel. Alſo
Gg = ch = $\frac{1}{4}$ cd. Eben ſo
Kk = di = $\frac{1}{4}$ cd.
Es iſt alſo GK = gk + $\frac{2}{4}$ gk = $\frac{6}{4}$ gk.

Die Hauptaxe (GK) des umſchriebenen Kies=12flachs iſt $\frac{3}{2}$ der Hauptaxe des eingeſchriebenen ($\frac{3}{2}$ gk.)

Die Flächenaxe (und Kante) des umſchriebenen Würfels (GK) iſt $\frac{3}{2}$ der Flächenaxe des eingeſchriebenen ($\frac{3}{2}$ gk). Hieraus folgt, daß die Abſtumpfung 2er #en Hauptkanten des Kies12flachs, welche 2 #e Flächen des eingeſchriebenen Würfels erzeugt, die Hauptaxe um $\frac{2}{6}$, an jeden Ende um $\frac{1}{6}$ verkürzt.

3. hi = $\frac{2}{4}$ gk = $\frac{2}{6}$ GK.
HI = $\frac{3}{6}$ GK.
hi : HI = $\frac{2}{6}$: $\frac{3}{6}$ = 2 : 3. D. i.
die Hauptkante des umſchriebenen 12flachs iſt $\frac{3}{2}$ der Hauptkante des eingeſchriebenen.

4. cd = $\frac{4}{6}$ GK)
HI = $\frac{3}{6}$ GK.) alſo cd : HI = 4 : 3 oder cd = $\frac{4}{3}$ HI.

Wir wiſſen daß die Queergere des Kies12flachs EF...K gleich der Kante (cd) des eingeſchriebenen Würfels.

Dieſe Queergere iſt demnach $\frac{2}{3}$ der Hauptkantenaxe, $\frac{4}{3}$ der Hauptkante deſſelben Kies12flachs.

Verglichen mit 2, folgt: daß die Queergere des umſchriebenen 12flachs = der Hauptkantenaxe des ein=

geſchriebenen und = der Flächenaxe des eingeſchriebenen Würfels. (Siehe die Figur 49.)

5. △ Mcd ∾ △ MGK.

$Mc : MG = cd : GK = \frac{4}{6} : \frac{6}{6}.$

Da die Linie MG in H gehälftet iſt, ſo iſt

$MC - MH = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6} MG = cH$. Daher

$Gc = \frac{2}{3} MG$ und

$$\left.\begin{matrix} Gc \\ \| \\ gh \end{matrix}\right) : GH = \frac{2}{6} : \frac{3}{6} = 2 : 3$$

d. i. die Hauptlinie GH des umſchriebenen 12flachs iſt $\frac{3}{2}$ der Hauptgere (gh) beim eingeſchriebenen.

Zugleich folgt daß jene Hauptlinie (GH) durch die Queergere (in c) ſo getheilt wird, daß $\frac{2}{3}$ nach der Hauptkante, $\frac{1}{3}$ nach dem gegenüber liegenden Winkel zu gelegen iſt. Jene $\frac{2}{3}$ ſind aber = der ganzen Linie gh des eingeſchriebenen 12flachs.

Die Raute LGMK (Fig. 49) will ich die Kiesraute nennen. Da cd = bc und

$cd = \frac{4}{6} GK = bc = \frac{2}{6} LM$. So iſt $\frac{4}{6} GK =$
$\frac{2}{6} Lm$ oder $GK = \frac{1}{2} LM$.

D. i. die lange Gere dieſer Raute iſt doppelt ſo lang als die kurze.

§. 29.

8flach und Kies12flach.

A. Das umſchriebene Kies12flach.

Stumpft man die 8 gleichkantigen Ecken des Kies12flachs durch je 3 Grundgeren ab, ſo erhält man das

20flach des Schwefelkieſes. Die 8 Abſtumpfungsdreiecke ſind gleichſeitig, die 12 Dreiecke — Ueberreſte der Flächen des 12flachs — deren jedes eine Hauptkante des 12flachs zur Grundlinie hat, ſind gleichſchenklig.

Die Hauptkantenaxe des 20flachs iſt alſo auch das Doppelte der Hauptkante.

Stumpft man nun die 8 gleichſeitigen Dreiecke ihnen # weiter ab, ſo ſchneiden ſie ſich in den 12 Ecken des 20flachs — oder den 12 ungleich 3kantigen Ecken des 12flachs — bilden ſo 12 neue Kanten, und es entſteht ein 8flach mit zugeſchärften Ecken.

Geht endlich jeder Abſtumpfungsſchnitt durch die Mitten der 3 Hauptkanten des 12flachs, an welche je 3 Kanten einer abgeſtumpften Ecke gränzen, ſo entſteht das dem 12flach eingeſchriebene 8flach.

Seine 6 Ecken treffen in die Mittelpunkte der 6 Hauptkanten des umſchriebenen 12flachs. Da dieſe eins mit den 6 Flächenmitten des dem 12flach umſchriebenen Würfels ſind, ſo ergiebt ſich hieraus, daß das entſtandene 8flach regelmäßig ſey, und demſelben Würfel eingeſchrieben werden könne, dem das Kies12flach eingeſchrieben iſt, aus welchem das 8flach hervorgegangen.

Die Axe des eingeſchriebenen 8flachs iſt alſo = der Hauptaxe des umſchriebenen Kies12flachs = der Kante des dieſem umſchriebenen Würfels. Die Kante dieſes 8flachs iſt demnach = der Linie von der Mitte einer Hauptkante des ihm umſchriebenen Kies12flachs zur Mitte jeder benachbarter Hauptkante. Dieſe Linie entſpricht der Linie zwiſchen 2 benachbarten Flächenmitten des dem

Kies12flach umſchriebenen Würfels, und iſt = der halben Gere dieſes Würfels.

B. Das eingeſchriebene Kies12flach.

Regelmäßige Abſtumpfung der 8flachkanten erzeugt das Rauten12flach, regelmäßige Abſtumpfung der Ecken, den Würfel. Zwiſchen beiden inne liegt die folgende Zuſchärfung.

Man ſchärfe alle Ecken des 8flachs zu, die Zuſchärfungsflächen auf die Kanten aufgeſetzt, und zwar ſo, daß die Zuſchärfungskanten 2er Ecken derſelben Axe einander #, die Schnittflächen der 3 Paar Zuſchärfungskanten ſich unter rechten Winkeln ſchneiden.

Die Zuſchärfungsſchnitte verzeichne man ſo auf dem 8flach.

Fig. 50. Man theile die 8flachskante de ſo, daß ce = $\frac{1}{3}$ de, dc = $\frac{2}{3}$ de. Nun fälle man cb ſenkrecht auf dg und ca ſenkrecht auf dh. Fig. 50

△ dbc ≌ △ dca. (1 S. 2 W.)

Da die Dreiecke Winkel von 90° und 60° haben, ſo iſt der dritte Winkel 30°. Daher db = $\frac{1}{2}$ cd = $\frac{1}{3}$ de. Alſo db auch = $\frac{1}{3}$ dg.

Nun fälle man bf ſenkrecht auf eg. △ bfg ≌ △ dcb. Daher cb = bf. fg = $\frac{1}{3}$ eg.

Ziehe fc. △ fce ≌ △ bfg. Daher

cf = fb = bc.

Das △ bcf iſt alſo gleichſeitig.

Auf ſolche Weiſe verfährt man auf allen Flächen des 8flachs,

Schärft man nun z. B. die Ecke e ſo zu, daß ein Schnitt von f nach ck, der zweite von i nach ck geht, und ſo alle Ecken, ſo erhält man das Kies20flach.

Fig. 51 Fig. 51. Durchſchnitt durch 4 in einer Ebene liegende 8flachkanten — und zwar durch de, en u. ſ. f. der Fig. 50.

ck iſt Zuſchärfungskante der Ecke e

xy — — — — welche mit e an derſelben Axe liegt.

cq = cx iſt Axe der zwei Zuſchärfungskanten oder Hauptkantenaxe des 20flachs.

1. $\triangle$ cek $\sim$ $\triangle$ den

ck : dn = ec : ed = 1 : 3. D. i.

Die Zuſchärfungskante oder Hauptkante (ck) des 20flachs iſt $\frac{1}{3}$ der 8flachaxe.

2. $\triangle$ cdx $\sim$ $\triangle$ e′de

cx : ee′ = dc : de = 2 : 3.

Die Hauptkantenaxe des 20flachs iſt $\frac{2}{3}$ der Axe des 8flachs. Daher nimmt jede einzelne Zuſchärfung einer 8flachsecke, aus welcher das Kies20flach entſpringt, $\frac{1}{6}$ der 8flachsaxe weg.

3. ck : cx = $\frac{1}{3}$: $\frac{2}{3}$ = 1 : 2.

Die Hauptkante des 20flachs iſt $\frac{1}{2}$ der Hauptkantenaxe des 20flachs.

So kommen wir auf daſſelbe, was wir ſchon bei Vergleichung des 20flachs mit dem Kies12flach fanden, daß nämlich ſeine Hauptkante = $\frac{1}{2}$ ſeiner Hauptkantenaxe ſey.

Beim 8flach iſt die Linie, welche 2 benachbarte Flächenmitten # einer Axe verbindet = $\frac{1}{3}$ dieſer Axe, die Hauptkante des 20flachs iſt ebenfalls $\frac{1}{3}$ dieſer Axe. Daher iſt die Linie zwiſchen den Mitten zweier gleichſeitigen Dreiecke des 20flachs, die an daſſelbe gleichſchenklige Dreieck gränzen = der Hauptkante des 20flachs.

Schneidet man vom erhaltenen 20flach aus # den Zuſchärfungsflächen weiter, bis die Flächen des 8flachs ſchwinden, indem je 3 Zuſchärfungsflächen in der Mitte eines 8flachdreiecks eine 3kantige Ecke bilden, ſo entſteht das Kies12flach.

8 gleichkantige Ecken dieſes 12flachs fallen mit den Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs zuſammen. Die Queergere (zwiſchen 2 ſolchen Ecken) iſt daher = der Linie, welche 2 benachbarte Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs # der Axe verbindet = $\frac{1}{3}$ der Axe des 8flachs.

Die erwähnte Queergere fanden wir = $\frac{2}{3}$ der Hauptaxe = $\frac{4}{3}$ der Hauptkante des Kies12flachs.

Theilen wir die Axe des umſchriebenen 8flachs in 12 Theile, ſo iſt daher

die Queergere des eingeſchrieb. 12flachs $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
die Hauptkante — — — $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
die Hauptaxe — — — $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

dieſer Axe.

Die Ecken des dem Kies12flach eingeſchriebenen Würfels fallen in die 8 gleichkantigen Ecken des 12flachs. Aus Vergleichung mit dem Vorigen ergiebt es ſich alſo, daß Ein und daſſelbe 8flach um das 12flach und um den dieſem eingeſchriebenen Würfel beſchrieben wird.

Die Hauptkantenaxe des dem 8flach eingeſchriebenen 20flachs fanden wir $\frac{2}{3}$, die des eingeſchriebenen Kies12flachs $\frac{1}{2}$ der 8flachsaxe. Die Axe jenes 20flachs verhält ſich alſo zu der dieſes 12flachs $= \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = 4 : 3$. Eben ſo verhalten ſich natürlich die Hauptkanten beider Körper. Die Hauptkante des 20flachs iſt $\frac{1}{3}$ der des 12flachs $\frac{1}{4}$ der Axe des umſchriebenen 8flachs.

C. a. Es ſey ein 8flach um, eins in daſſelbe Kies12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zueinander?

Die Axe des umſchriebenen iſt = 2 Hauptkantenaxen des 12flachs, die des eingeſchriebenen = einer. Letztere iſt alſo $\frac{1}{2}$ der erſtern [30]).

Und ſo iſt jede Linie des umſchriebenen 8flachs $\frac{1}{2}$ der ihr gleichartigen Linie des eingeſchriebenen.

b. Es ſey ein Kies12flach um, eins in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander.

Die Hauptkantenaxe des umſchriebenen iſt = der Axe des 8flachs, die Axe dieſes iſt = 2 Axen des ihm eingeſchriebenen 12flachs. Die Hauptkantenaxe des eingeſchriebenen 12flachs iſt demnach $\frac{1}{2}$ der Hauptkantenaxe des umſchriebenen.

Und ſo iſt jede Linie des eingeſchriebenen 12flachs $\frac{1}{2}$ der ihr gleichartigen Linie des umſchriebenen.

30) Man verwechſele nicht das dem 12flach eingeſchriebene 8flach mit dem 8flach, welches dem Würfel eingeſchrieben wird, der ſelbſt dem 12flach eingeſchrieben iſt. Die Axe des letzteren iſt, wie wir wiſſen, um $\frac{2}{6}$ kürzer als die des erſtern.

§. 30.

Rauten12flach und Kies12flach.

A. Das umſchriebene Kies12flach.

Fig. 52. In dem Durchſchnitt abcd durch die Mitten 4 #er Würfelkanten, iſt der Hauptſchnitt efghik des Kies12flachs, dann lfmi der Durchſchnitt eines Rauten12flachs durch 4 in derſelben Ebene liegende lange Geren verzeichnet. Fig. 52

Man halte das Kies12flach zwiſchen einer ſenkrechten Hauptaxe. Aus Fig 52. ergiebt es ſich, daß man 4 Flächen des Rauten12flachs erhält, wenn man das Meſſer auf die beiden waagrechten Hauptkanten, deren Mitten f und c, aufſetzt, und nach den Mitten l und m der ſenkrechten Hauptkanten gh und ek ſchneidet. Auf ähnliche Weiſe erhält man die übrigen 8 Flächen des Rauten12flachs.

Die 6 4kantigen Axen des eingeſchriebenen Rauten12flachs ſind = den 6 Hauptaxen des umſchriebenen Kies12flachs. Die kurze Gere des Rauten12flachs, welche ½ ſeiner 4kantigen Axe, iſt daher = der Hauptkante des umſchriebenen Kies12flachs.

B. Das eingeſchriebene Kies12flach.

12 lange Geren des Rauten12flachs als ein Netz für ſich gedacht, entſprechen vollkommen dem Netze, welches die 8flachkanten bilden.

Um aus dem Rauten12flach das Kies12flach zu ſchneiden, verfahre man nun mit den langen Geren ganz ſo, wie wir mit den Kanten des 8flachs verfuhren, um aus dieſem das Kies20flach zu erzeugen.

Fig. 53 Fig. 53. Man theile (Fig. 53 Rauten12flach) die langen Geren des Rauten12flachs in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, und zwar ſo, daß von einer 4kantigen Ecke aus, von jeder 2 einander gegenüber liegenden Geren $\frac{1}{3}$ Ec und Ed, von jeder der 2 andern $\frac{2}{3}$ Ea und Eb abgeſchnitten wird [31]). Nun ſchärfe man z. B. die 4kantige Ecke E von a nach cd und von b nach cd zu, und ſo alle 4kantigen Ecken. Die Zuſchärfungskanten der 4kantigen Ecken derſelben Axe laufen #, 3 Durchſchnittsflächen von 3 Paar Zuſchärfungskanten ſchneiden ſich unter rechten Winkeln.

Fig. 54 Fig. 54. Durchſchnitt durch 4 lange in einer Ebene liegende Geren des Rauten12flachs. Theile dieſe Geren in c, i, d, k in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Die Punkte F, E, H, c, d entſprechen den gleich bezeichneten Punkten Fig. 53. G ſtellt die 4kantige Ecke vor, welche mit E an derſelben Axe liegt.

Ziehe dc, ik. Dieſe Linien ſtellen die Zuſchärfungskanten der Ecken E und G vor.

31) Iſt man an einer 4kantigen Ecke ſo verfahren, ſo ergiebt es ſich von ſelbſt, wie man die Theilungspunkte der übrigen langen Geren legen muß. — Ich war in Hinſicht des Verhältniſſes zwiſchen dem eingeſchriebenen Kies12flach und dem Rauten12flach in einen Irrthum gerathen, welcher mir durch ein Modell, welches mein fleißigen Schüler Bäntſch machte, benommen wurde.

1. △ Edc ∾ △ EFH.

cd : FH = Ec : EF = 1 : 3.

Die Zuſchärfungskante cd iſt $\frac{1}{3}$ der 4kantigen Axe FH (oder EG) des umſchriebenen Rauten12flachs.

2. El = lc = $\frac{1}{2}$ cd = $\frac{1}{6}$ EG = nG.

2 Zuſchärfungskanten ſchneiden an den 2 4kantigen Ecken $\frac{2}{6}$ der 4kantigen Axe EG ab. Daher iſt.

ln = $\frac{4}{6}$ EG.

Die Zuſchärfungskanten cd und ik ſind, wie wir ſogleich ſehen werden, als Hauptkanten, ln aber als Hauptaxe des eingeſchriebenen Kies12flachs zu betrachten.

Es iſt alſo die Hauptkante (cd) $\frac{1}{3}$ der 4kantigen Axe EG des umſchriebenen Rauten12flachs, die Hauptkantenaxe (ln) $\frac{2}{3}$ jener Axe — mithin auch — wie es ſeyn muß — das Doppelte der Hauptkante.

3. Die Zuſchärfungen verkürzen FH um ein Gleiches wie EG. Mache daher Fa = Hb = El = $\frac{1}{6}$ FH. Dann iſt ab = ln. Ziehe ia, ca, db, bk, ſo iſt caikbd der vollſtändige Hauptdurchſchnitt des eingeſchriebenen Kies12flachs.

4. ci = ln.

Theile ca und ai in q und p in $\frac{2}{3}$ u. $\frac{1}{3}$. Ziehe qp. Wir wiſſen das qp der Queergere des Kies12flachs ai....c entſpricht.

qp = $\frac{2}{3}$ ci

= $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ EG = $\frac{4}{9}$ EG.

Die kurze Gere des Rauten12flachs EFGH iſt = $\frac{4}{8}$ EG. Alſo iſt die Queergere des eingeſchriebenen Kies12flachs um $\frac{1}{18}$ kürzer als jene kurze Gere des umſchriebenen Rauten12flachs.

Die Kante des Würfels, welcher in das eingeſchriebene Kies12flach beſchrieben wird, iſt daher um $\frac{1}{18}$ kürzer als die Kante des Würfels, den man in das umſchriebene Rauten12flach einſchreibt. Mithin wird bei der Verwandlung dieſes Rauten12flachs in jenes Kies12flach von jedem Ende einer 3kantigen Axe des Rauten12flachs $\frac{1}{18}$ weggeſchnitten.

C. Es iſt ein Kies12flach in, eins um daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Fig. 55 Fig. 55. ſtellt 2 Durchſchnitte des Kies12flachs und 2 des Rauten12flachs dar. Die Hauptaxe BE des umſchriebenen iſt = der Axe des Rauten12flachs, die des eingeſchriebenen be $\frac{2}{3}$ dieſer Axe, alſo $\frac{2}{3}$ der Hauptaxe des umſchriebenen Kies12flachs. Eben ſo iſt die 4kantige Axe des eingeſchriebenen Rauten12flachs $\frac{2}{3}$ der 4kantigen Axe des umſchriebenen, denn dieſe Axen ſind — wie die Figur zeigt — eins mit den eben betrachteten Axen des Kies12flachs [32]).

§. 31.

Leuzit und Kies12flach.

A. Das eingeſchriebene Kies12flach.

Fig. 56 Fig. 56. Verzeichne ab...h, Durchſchnitt durch 8 in einer Ebene liegende Leuzitkanten.

Geviert

32) Fig. 55 iſt IKLM Durchſchnitt durch die Mitten 4 #er Kanten des Würfels, in welchen das Kies12flach AB...F und das Rauten12flach GBHE eingeſchrieben ſind. KL eine Kantenaxe des

Geviert aceg, ein Durchſchnitt durch 4 lange in einer Ebene liegende Geren des dem Leuzit eingeſchriebenen Rauten12flachs. Verbinde die ungleich 4kantigen Leuzitecken zum Geviert bdhf.

Jede Seite dieſes Gevierts (z. B. bd) iſt $\frac{2}{3}$ einer Hauptleuzitaxe (ae und cg) läuft der einen (ae) gleich, und ſchneidet von der andern (cg) unter einem rechten Winkel $\frac{1}{6}$ (kc) ab. Hiernach ſind die 2 Hauptleuzitaxen ae und cg eingetheilt [33]).

Aus den Punkten i, l, m, o in denen ſich die 2 angegebenen Gevierte ſchneiden, ziehe nach k und n, den Hälftpunkten von bd und hf, die Linien ik, lk, nm, on.

1. $\triangle$ qcr $\sim$ $\triangle$ ace. Daher

$$cr : ce = qr : ae = ck : cp = 1 : 3.$$ Alſo

$$qr = \frac{1}{3}\, ae$$

$$cr = \frac{1}{3}\, ce.$$

Eben ſo iſt

$$lm = \frac{1}{3}\, cg = \frac{1}{3}\, ae = qr$$

$$le = \frac{1}{3}\, ce = cr.$$ Daher

$$rl = ce - \frac{2}{3}\, ce = \frac{1}{3}\, ce$$ oder

$$cr = rl = le.$$

2. $\triangle$ mte $\cong$ $\triangle$ umf $\cong$ $\triangle$ lte $\cong$ $\triangle$ lrd. Daher

$$mf = mt = tl = ld.$$ Alſo

$$lm = \frac{1}{2}\, df = \frac{1}{2}\, kn.$$

des Würfels, geht durch die Mitte der Queergere jenes Kies12flachs, theilt daher BC (und bc) in $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$, und hälftet die lange Gere BH des Rauten12flachs.

33) Vergleiche § 11. C. a.

Betrachten wir bdhf als Durchſchnitt durch 4 in einer Ebene liegende 6kantige Ecken des Mittelkryſtalls zwiſchen Würfel und Leuzit, oder — was daſſelbe iſt — als Durchſchnitt durch die Mitten 4 #er Würfelkanten, ſo iſt iklmno in dieſen Durchſchnitt ganz ſo verzeichnet wie Fig. 48 der Durchſchnitt des Kies12flachs in denſelben Würfeldurchſchnitt.

Wir fanden ce in l in $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ getheilt, eben ſo iſt es ac in i, ag in o, ge in m. Es iſt daher iklmno auch in den Durchſchnitt aceg des Rauten12flachs wie der Hauptdurchſchnitt eines Kies12flachs eingeſchrieben. (Fig. 54).

iklmno iſt mithin Hauptdurchſchnitt eines Kies12flachs.

3. $\triangle$ ckr $\cong$ $\triangle$ drl

$\triangle$ krl $\cong$ $\triangle$ crd.

Daher iſt cd # kl. Eben ſo iſt bc # ik.

Es iſt demnach der Winkel bcd, den 2 einander an einer Hauptleuzitecke gegenüber liegende Leuzitkanten bilden, gleich dem Winkel der Hauptkante des Kies12flachs = lki.

4. Der Durchſchnitt iklmno iſt Durchſchnitt eines Kies12flachs, welches in das Rauten12flach eingeſchrieben, das ſelbſt im Leuzit ſteckt. Jenes Kies12flach würde in keinem Punkte die Oberfläche des Leuzits berühren [34]). Wie finde ich

34) Fig. 56 zeigt ſchon, daß weder Flächen noch Hauptkanten, noch ungleich 3kantige Ecken des Kies12flachs ik...o in die Oberflächen

nun das dem Leuzit unmittelbar eingeſchriebene, in beſtimmten Punkten die Oberfläche des Leuzits treffende, Kies12flach?

Da je 2 Flächen des Kies12flachs unter demſelben Winkel in einer Hauptkante zuſammentreffen, wie 2 einander an einer Hauptleuzitecke gegenüber liegende längere Leuzitkanten, ſo wird man die 6 Paar Flächen des Kies12flachs erhalten durch regelmäßige Abſtumpfung von 6 Paar längeren Leuzitkanten. Und zwar ſtumpft man an jeder Hauptleuzitecke ein Paar ab. Die Kanten, welche 2 Paar Abſtumpfungsflächen an 2 Ecken derſelben Axe bilden, ſind #, die Durchſchnitte von 3 Paar ſolchen Kanten ſchneiden ſich unter rechten Winkeln.

Ehe ich nun genauer angebe, wie dieſe Abſtumpfung der Leuzitkanten beſchaffen ſeyn muß, will ich die bequemſte Art anzeigen, wie man den Durchſchnitt durch 8 in einer Ebene liegende Leuzitkanten verzeichnet.

Fig. 57. Durch il ziehe km = il ſo, daß ſich beide Linien in n unter rechtem Winkel kreuzen und hälften. Jede der erhaltenen Hälften hälfte wiederum in A, C, E, G, Ziehe nun iC, Cl, lG, Gi, — Ak, kE, Em, mA. Fig. 57

flächen des Leuzits i. ab...h fallen. Die 8 gleich 3kantigen Kiesecken fallen eben ſo wenig in die 3kantigen Leuzitecken. Theile ik, kl durch x und y in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. xy entſpricht der Länge einer Queergere.

$$xy = \frac{2}{3}\ il = \frac{4}{9}\ ae.$$

Die Linie zwiſchen 2 3kantigen Leuzitecken # der Hauptaxe iſt $\frac{4}{8}$ dieſer Hauptaxe ae, alſo länger als die Queergere. Fällt die Queergere aber nicht mit jener Linie zuſammen, ſo treffen auch die 3kantigen Ecken nicht zuſammen.

ſo ſind iClG und AkEm 2 Kiesrauten (Fig. 49 iſt zu vergleichen), da in jeder die kurze Gere = $\frac{1}{2}$ der langen. AE = $\frac{1}{2}$ km und CG = $\frac{1}{2}$ il. Beide Rauten ſind einander gleich, da ihre Geren gleich lang ſind.

Betrachten wir nun das 8eck AB....H.

Seine Winkel bei A, C, E, G ſind = dem Winkel der Hauptkante des Kies12flachs.

Je 2 Seiten des 8ecks ſind # z. B. BC # GF. — △ CkD ≅ △ DEl ≅ △ lEF ꝛc. (1 S. u. 3 W.) Daher

CD = DE = EF ꝛc.

Die Seiten des 8ecks ſind alſo gleich. Da der Winkel a = b = c = d u. ſ. w., ſo ſind auch die Winkel des 8ecks bei D, F, H, B, einander gleich, jeder ergänzt einen der 8eckswinkel bei A, C, E, G zu 270°.

△ BkD ≅ △ DlF ≅ △ FmH ≅ △ HiB. (2 S. 1 W.)

Daher

BD = DF = FH = HB.

BD # il

DF # GC

Nach Fig. 49 iſt nun in der Kiesraute iClG

BD = $\frac{1}{3}$ il = $\frac{2}{3}$ CG.

Zugleich ſchneidet BD rechtwinklig $\frac{1}{6}$ CG ab, eben ſo HF u. ſ. w.

Es bedarf hiernach keiner weitern Vergleichung um darzuthun, daß das 8eck AB...H alle Eigenſchaften des Durchſchnitts durch 8 in einer Ebene liegende Leuzitkanten beſitze. A, C, E, G ſtellen Hauptleuzitecken, B, D, H, F ungleich 4kantige Leuzitecken vor.

Aus Allem ergeben ſich die Linieneintheilungen der Figur 57.

Fig. 58. ab....h Durchſchnitt durch 8 in einer Ebene liegende Leuzitkanten. Fig. 58

aceg Durchſchnitt durch 4 lange Geren des in den Leuzit eingeſchriebenen Rauten12flachs.

Hälfte alle Leuzitkanten in a. b...h.

Durch a ziehe tk # bc, durch d ziehe ku # cd, durch e ziehe un # gf. Durch h ziehe tn # hg, ſo erhälſt du die Raute tkun, eine Kiesraute, da ihre größern Winkel bei k und n = den Winkeln bcd und fgh 2er an einer Hauptecke gegenüber liegender Leuzitkanten, welche, wie wir wiſſen, einen Winkel bilden, der dem Hauptkantenwinkel des Kies12flachs gleich iſt.

Auf gleiche Weiſe verzeichne die gleiche und ähnliche Raute xvew.

Hälfte die Seiten der Raute ſkun in i, l, m, o ziehe io, lm ſo iſt iklmno Hauptdurchſchnitt des dem Leuzit ab...h eingeſchriebenen Kies12flachs.

△ ced ∾ △ qed da qd # cd

ce : qe = cd : qd = de : de = 2 : 1

△ ced ∾ △ cqc da cq # de

ce : cq = cd : co = 2 : 1.

Hiernach werden alſo die 4 langen Geren des Rauten12flachs aceg in denſelben Punkten gehälftet, in p. q. s. r. in welchen ſich die 2 Kiesrauten ſchneiden.

Die Linien pq, qr, ſrs, sp ſind — Fig. 57. — gleich, jede $\frac{2}{3}$ kn oder $\frac{2}{3}$ xy. Da lm = $\frac{1}{2}$ kn ſo iſt qr = $\frac{4}{3}$ lm.

Vergleicht man hiernach die 3 ähnlichen Dreiecke kun, qur, und lum ſo ergiebt ſich daß

qu = $\frac{2}{3}$ ku

$kq = \frac{1}{3} ku$

$lu = \frac{1}{2} ku.$

$qu - lu = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} ku = \frac{1}{6} ku = \frac{1}{2} kq.$

Die Linie kl, welche einer Hauptgere des Kies12flachs entſpricht, wird alſo in q in $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ zerlegt. So die ähnlichen Geren in den Punkten r, s, p. Die Linie qr entſpricht daher einer Queergere des Kies12flachs, und iſt, wie ſich aus dem Vorigen ergiebt, auch $\frac{2}{3}$ der Axe kn, $\frac{4}{3}$ der Hauptkante lm. △ ceg ∾ △ qer, da ce in q, ge in r gehälftet iſt. Daher $qr = \frac{1}{2} cg = pq = qs = sr.$

Die Queergere des eingeſchriebenen Kies12flachs iſt alſo $= \frac{1}{2}$ der Hauptaxe des umſchriebenen Leuzits = der Linie zwiſchen 2 3kantigen Leuzitecken # einer Hauptaxe. Dann aber fallen die 8 gleichkantigen Ecken des Kies12flachs mit den 8 3kantigen Ecken des Leuzits zuſammen. — Hieraus folgt, daß das dem Leuzit eingeſchriebene Kies12flach gebildet wird, wenn man eine Leuzitkante, z. B. cd (Fig. 58) regelmäßig ſo abſtumft, daß der Schnitt von dem Hälftpunkt (d) der benachbarten Kante (de) aus, durch 2 jenem Hälftpunkte zunächſt gelegene 3kantige Leuzitecken geht. —

Es iſt $qr = \frac{2}{3} kn$

$qr = \frac{1}{2} cg$

$\frac{2}{3} kn = \frac{1}{2} cg$ alſo $kn = \frac{3}{4} cg.$ Daher

$kc + ng = \frac{1}{4} cg$ und $kc = \frac{1}{8} cg$

$kn = \frac{1}{2} vw$

$vk = nw = \frac{1}{4} vw = \frac{1}{2} kn.$ Da $kn = \frac{3}{4} cg$, ſo iſt

$vk = \frac{3}{8} cg$, und $vk - ck = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} cg = \frac{2}{8} cg = vc.$

Hiernach iſt vw eingetheilt.

B. Das umſchriebene Kies12flach.

Fig. 58. Wir wiſſen durch Fig. 57, daß x p k q yrns, das 8eck durch 2 ſich kreuzende Kiesrauten gebildet, wahrer Durchſchnitt durch 8 in einer Ebene liegende Leuzitkanten ſey. Fig. 58

Es iſt Fig. 58. zugleich Durchſchnitt des Leuzits, welcher dem Kies12flach iklmno eingeſchrieben. Es ergiebt ſich, daß 4 Kanten pk, kq, rn, ns, mit $\frac{2}{3}$ der Hauptlinien des Kies12flachs zuſammenfallen. Die 4 übrigen qy, yr, sx, xp, gehen von den Kreutzpunkten q und r der Hauptlinie und Quergere des Kies12flachs nach der Mitte y der benachbarten Hauptkante lm; von p und s nach x.

Die Hauptaxen des eingeſchriebenen Leuzits kn, xy ſind = den Hauptaxen des umſchriebenen Kies12flachs, die Linien (qr etc.) zwiſchen je 2 ungleich 4kantigen Leuziteckeu ⋕ eine Hauptleuzitaxe = den Quergeren des umſchriebenen Kies12flachs.

Da die Hauptleuzitecken in die Mitten der Hauptkanten des Kies12flachs fallen, ſo treffen in ſolcher Mitte 4 Leuzitkanten zuſammen. 2 fallen wie wir ſahen, in die Hauptlinien. Sie reichen jedoch nur bis an die 2 Quergeren. Die 2 andern Leuzitkanten laufen von demſelben Mittelpunkte der Hauptkante zur Mitte der 2 Queergeren, welche mit beiden vorigen ein Geviert bilden.

Es ergiebt ſich hieraus, daß der Leuzit aus dem Kies12flach durch 3flächige Zuſpitzung der 8 gleichkanti-

gen Ecken erzeugt wird, jede Zuſpitzungsfläche auf eine Hauptlinie aufgeſetzt [35]).

Daß jede Zuſpitzungsfläche # einer der 4 gleichkantigen Axen des Kies12flachs, ergiebt ſich aus Vergleichung mit dem Würfel, deſſen Ecken mit 3 (Leuzit)=Flächen zugeſpitzt ſind.

F 59 C. Fig. 59 C. Es iſt ein Leuzit AB... H um, einer ab... h in daſſelbe Kies12flach kclmgi beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Hauptaxe cg des eingeſchriebenen iſt = der Hauptaxe des Kies12flachs, dieſe aber fanden wir = $\frac{3}{4}$ der Hauptaxe CG des umſchriebenen Leuzits. So iſt jede Linie des eingeſchriebenen Leuzits $\frac{3}{4}$ der gleichartigen Linie des umſchriebenen.

Eben ſo iſt jede Linie des eingeſchriebenen Kies12flachs $\frac{3}{4}$ der gleichartigen Linie des umſchriebenen. Zwiſchen beiden Leuziten und beiden Kies12flachen findet alſo ganz das Verhältniß ſtatt, wie zwiſchen 2 Leuziten, deren einer um, der andere in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben worden, und wie zwiſchen 2 Rauten12flachen, deren eins um, das andere in denſelben Leuzit geſchrieben iſt.

35) Kies12flache mit ſolcher Zuſpitzung fand ich unter den Schwefelkieſen von der Inſel Elba und Kongsberg. — Aus der Betrachtung folgt auch, daß derſelbe Pyramidenwürfel entſteht, wenn man die 24 längern Leuzitkanten, oder am Kies12flach die 12 ungleichkantigen Ecken abſtumpft. Letztere ſo, daß man von einer Quergere, (welche die Baſis des Dreiecks, deſſen Schenkel 2 Kanten der abzuſtumpfenden Ecke) zur Mitte der Hauptkante ſchneidet, deren einer Endpunkt die Ecke.

§. 32.

4flach und Kies12flach.

A. Das eingeſchriebene Kies12flach.

Auf die Flächen des 4flachs verzeichne die Flächen des 8flachs. 12 gezeichnete Linien ſtellen 12 Kanten des 8flachs vor. 3 × 4 ſolche Linien bilden 3 Kanten=Gevierte, die ſich unter rechtem Winkel ſchneiden, jedes Geviert iſt zweien 4flachskanten #.

Fig. 50 zeigte, wie die Ecken des 8flachs zuzuſchärfen ſeyen, um ein Kies20flach zu erhalten. Die Kantenmitten des 4flachs entſprechen jenen Ecken; ſchärfen wir dieſe Mitten zu, wie Fig 50 die 8flachs=Ecken.

In einer Kantenmitte des 4flachs treffen 4 Linien zuſammen, welche den 8flachskanten entſprechen. Von jener Mitte aus ſchneide von 2 einander gegenüberliegenden Linien $\frac{1}{3}$, von den 2 andern $\frac{2}{3}$ ab. Verfahre ſo von allen Kantenmitten aus, nach Maasgabe der Eintheilung bei der erſten Kantenmitte.

Fig. 60. abc Fläche des 4flachs. def Fläche des eingeſchriebenen 8flachs. g, h, i, Punkte, welche de, ef, fd in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ zerfällen. hgi ein gleichſeitiges △ des dem 8flach eingeſchriebenen 20flachs. Verlängere die Linien gi, hi, hg, bis jede nach 2 Seiten 2 Kanten des 4flachs trifft. Ziehe die Höhenlinie bd. Fig. 60

Da wir wiſſen daß

$$ef = \frac{1}{2}\,ac$$

$$kf = \frac{1}{2}\,ef$$

$$if = \frac{1}{3}\,ef$$

ſo geht die in der Figur gegebene Eintheilung der Linien aus Vergleichung der ähnlichen Dreiecke bxf und pif, bdc und pnc hervor.

Man ſchneide nun von ol aus durch den (h entſprechenden) $\frac{1}{3}$ Punkt der (Quaſi) 8flachkante, welche mit de in e einen rechten Winkel bildet.

Man denke ſich auf der an ab grenzenden 4flachsfläche dieſelben Linien, wie auf abc verzeichnet. Eine Linie, welche ol entſpricht. Dieſe ſchneide von der 8flachskante, die fe gegenüber liegt $\frac{2}{3}$, von der Kante die de gegenüber liegt $\frac{1}{3}$ (nach e zu gerechnet) ab. Von einer ſolchen Linie aus ſchneide man durch x und h (Fig. 60).

Nach Art der 2 angegebenen Schnitte führe man noch 10 (an jede der 5 übrigen 4flachskanten 2), ſo erhält man die 6 Paar gleichſchenkligen Dreiecke des Kies-20flachs. 4 gleichſeitige Dreiecke des 20flachs fallen in die 4 Flächen des 4flachs, ſtatt der 4 übrigen erhält man 4 3kantige Ecken.

Schneidet man nun # den 12 angegebenen Schnittflächen ſo weit, bis (Fig. 60.) die Linie pn in bd fällt, und ſo auch lo, mq u. ſ. w. durch die Mittelpunkte der Flächen des 4flachs gehn, ſo erhält man das Kies-12flach, welches dem 4flach eingeſchrieben iſt [36]).

Die 8 gleichkantigen Ecken des Kies12flachs entſprechen den Ecken des ihm eingeſchriebenen Würfels. 4 Würfel-Ecken, deren Lage wir bei Betrachtung des Verhältniſſes vom Würfel und 4flach kennen gelernt, fallen in die Flächenmitten des dem Würfel umſchriebenen

36) Zum Verſtändniß des eben Geſagten bedarf es durchaus eines Modells.

4flachs. 4 gleichkantige Ecken des Kies12flachs, welche jenen 4 Würfelecken entſprechen, treffen ebenfalls in 4 Flächenmitten des dem Kies12flache umſchriebenen 4flachs. Die 4 übrigen gleichkantigen Ecken des Kies12flachs fallen nach den Ecken des 4flachs zu.

Die Linien zwiſchen 2 gleichkantigen Ecken des Kies12flachs, welche der Gere des dem Kies12flach eingeſchriebenen Würfels entſpricht, iſt = der Linie zwiſchen 2 Dreieckmitten des 4flachs = ⅓ der 4flachskante.

B. Das umſchriebene Kies12flach.

Stumpfe die 4 gleichkantigen 12flachsecken, welche in die Flächen des umſchriebenen 4flachs fallen, ab. Jeder Schnitt gehe durch 3 gleichkantige Ecken, welche mit der abzuſtumpfenden Ecke 3 Quergeeren begränzen. So entſteht das dem Kies12flach eingeſchriebene 4flach [37]).

4 Ecken dieſes 4flachs fallen in die 4 nicht abgeſtumpften gleichkantigen Ecken des Kies12flachs. Die Kante des 4flachs, oder die Linie zwiſchen je 2 nicht abgeſtumpften Ecken, entſpricht der Gere des dem Kies12flach eingeſchriebenen Würfels.

C. Es iſt ein 4flach um, eins in daſſelbe Kies12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Die Linien zwiſchen 2 gleich 3kantigen Ecken des Kies12flachs, welche der Gere des dem 12flach einge-

37) Dieſe Schnitte ergeben ſich wiederum durch Vergleichung mit dem Würfel, welcher dem Kies12flach eingeſchrieben iſt.

ſchriebenen Würfels entſpricht, iſt $\frac{1}{3}$ der Kante des um- und gleich der Kante des eingeſchriebenen 4flachs.

Und ſo iſt jede Linie des eingeſchriebenen 4flachs $\frac{1}{3}$ der Linie des umſchriebenen. Daſſelbe gilt von dem Verhältniß eines um- und eines in daſſelbe 4flach beſchriebenen Kies12flachs. Man halte ſich bei dieſer Betrachtung an den Würfel, welcher jenem Kies12flach eingeſchrieben iſt, und vergleiche Fig. 37.

§. 33.

Das Kies24flach.

Wir ſahen daß eine 3flächige Zuſpitzung der 8 gleichkantigen Ecken des Kies12flachs, jede Zuſpitzung auf eine Hauptgere aufgeſetzt, einen Leuzit giebt. Sitzen die Zuſpitzungen dagegen auf je 3 Grundgeren einer zugeſpitzten Ecke, ſo entſteht ein Körper von 6 Paar ſpitzen gleichſchenkligen Dreiecken, den Ueberreſten des 12flachs und 8 × 3 ſtumpfen gleichſchenkligen Zuſpitzungsdreiecken. Die 6 Paar Dreiecke entſprechen den 6 Paar gleichſchenkligen Dreiecken des Kies20flachs, aus welchem gegenwärtiger Körper entſtehen würde, wenn man auf jede ſeiner 8 gleichſeitigen Dreiecke eine ſtumpfe 3ſeitige Pyramide aufſetzte.

Schneidet man nun # den 24 Zuſpitzungsflächen weiter, bis je 4 Zuſpitzungsflächen in der Mitte der 6 Hauptkanten des Kies12flachs eine 4kantige Ecke bilden, ſo entſteht das Kies24flach. Die Flächen deſſelben ſind unregelmäßige Vierecke. Es hat 8 gleich 3kantige Ecken,

12 und 6 ungleich 4kantige Ecken. Kanten hat es 8 × 3, welche in den 8 3kantigen Ecken zuſammenſtoßen, und 6 Paar längere, 6 Paar kürzere, welche in den 6 4kantigen Ecken zuſammentreffen.

Man halte den Körper zwiſchen einer der drei 4kantigen Axen ſenkrecht. An jeder der 6 4kantigen Ecken ſtoßen 2 Paar Flächen zuſammen. — Oder auch: 3 Flächen treffen in jeder der 8 3kantigen Ecken zuſammen.

Flächen-, Kanten- und Ecken-Zahl des Kies24flachs ſtimmt ganz mit der des Leuzits überein. Auch dies, daß die Abſtumpfung der 8 3kantigen Ecken ins 8flach, die der 12 4kantigen durch je 4 gleich lange Grundgeren ins Rauten12flach, die der 6 4kantigen Ecken zuletzt in den Würfel führt. Zunächſt führt aber letztere Abſtumpfung, wenn man bis zu 2, am Ende der 2 kürzern Kanten einander gegenüber liegenden ungleich 4kantigen Ecken, ſchneidet, in ein 30flach. Man halte dies zwiſchen 2 #en waagrechten Rauten. Es hat 24 unregelmäßige Vierecke — Ueberreſte der Flächen des Kies24flachs — und 6 Rauten, Abſtumpfungsflächen der 6 4kantigen Ecken des 24flachs, und zugleich Anfänge von 6 Würfelflächen. Ferner hat das 30flach 8 gleich 3kantige Ecken, 6 Paar ungleich 3kantige Ecken, 6 Paar ungleich 5kantige Ecken; 8 × 3 und 6 × 4 und 12 zuſammen 60 Kanten.

Hauy giebt (Theil IV. S. 97.) folgende Anweiſung dies 30flach zu ſchneiden.

Fig. 61 Siehe Fig. 47. Fig. 61. „Erſt macht man ſich einen Würfel, und theilt die Flächen deſſelben (Fig. 47) durch die Linien mn, m′n′, m″n″, welche ſich einander nach 3 verſchiedenen Richtungen ſenkrecht ſchneiden, jede in 2 Hälften.

Auf jeder ſolchen Linie wie mn nimmt man zu beiden ein Stück dm, fr gleich dem 4ten Theile der ganzen Linie, und verzeichnet alsdann eine Raute defg, deren große Diagonale das mittlere Stück df und die kleine die Hälfte der großen iſt; darauf legt man durch die Seiten dg, gf, de, ef Schnittebenen, wovon die beiden erſten zugleich den ſpitzigen Winkel d′ der Raute d′e′f′g′ berühren, die beiden andern aber den correſpondirenden Winkel auf der entgegengeſetzten Fläche. An den übrigen Rhomben macht man es eben ſo, und erhält auf dieſe Weiſe 24 Schnittebenen, welche mit den 6 auf den Flächen des Würfels gezeichneten Rauten zuſammen die Oberfläche des 30flachs bilden.

Jede der 6 Rauten des Kies30flachs iſt mithin der Art, daß ihre lange Gere doppelt ſo groß als die kurze. Dieſe Raute ſtimmt alſo ganz mit der oft angeführten Kiesraute überein. —

Schneidet man ⋕ den 24 von Hauy angegebenen Schnittebenen ſo weit, bis die 6 Rauten des 30flachs — oder die Würfelflächen — ganz ſchwinden, indem je 4 Schnittflächen in der Mitte einer Würfelfläche eine 4kantige Ecke bilden, ſo entſteht das Kies24flach. —

§. 34.

Das Geſchlecht des regelmäßigen 12flachs.

Das regelmäßige 12flach, 20flach und 30flach finden ſich nicht unter den Kryſtallen, ihnen ähnelnde Körper ſchließen ſich aber, wie wir ſahen, an das Würfelgeſchlecht an.

Die Natur wollte eine Verwandtſchaft zwiſchen der Würfelſippe und dem 12=, 20= und 30flach.

Hauy zeigte, wie ſchon erwähnt, warum der Würfel nicht in das regelmäßige 12flach übergehe, wohl aber in das Kies12flach. Dieſes ſchließt ſich natürlich an die Würfelſippe an, weil es aus regelmäßiger Abſtumpfung 12 längerer Leuzitkanten hervorgeht.

Es ordnet ſich demnach das Geſchlecht des 12flachs im Steinreiche dem Würfelgeſchlechte unter, indem es durch ein gewiſſes Aufgeben ſeiner Eigenthümlichkeit mit demſelben verwandt wird.

Aber ſelbſt das Geſchlecht des regelmäßigen 12flachs ſcheint dem Würfelgeſchlecht gewiſſermaaßen untergeordnet zu ſeyn. Kepler ſtellt ſchon den Würfel als erſtgebohrene Geſtalt in die Mitte zwiſchen das 4flach und regelmäßige 12flach, als welche aus dem Würfel erzeugt würden. Das Vierflach, ſagte er, ſey der erſte der ausgeſchnittenen Körper — ſey aus dem Würfel regelmäßig herausgeſchnitten —; das 12flach, der erſte zuſammen=

geſetzte Körper, durch Vermehrung und Bedeckung des Würfels erzeugt [38]).

Es ſpricht für dieſes Untergeordnetſeyn des regelmäßigen 12flach-Geſchlechts, daß ſeine Körper (12- 20- und 30flach ꝛc.) verſteckt das Gepräge des Würfels tragen. Das regelmäßige 12 und 20flach haben 30 Kanten. Durch regelmäßige Abſtumpfung von 5 × 6 dieſer Kanten laſſen ſich 5 Würfel erzeugen. Eben ſo durch #e Vergrößerung von 5 × 6 Flächen des regelmäßigen 30flachs [39]).

Auch leuchtet ein, wie ſich durch Abſtumpfung von je 8 Ecken des 12flachs, je 8 3kantigen Ecken des 30flachs und durch #e Vergrößerung von je 8 Flächen des 20flachs mehrere regelmäßige 8flache bilden laſſen [40]).

Dagegen tragen die Körper der Würfelſippe keine Spur vom Gepräge der Körper des regelmäßigen 12flach-Geſchlechts.

Wir

38) Cubus est prima (Figura) genitarum, Tetraedron prima exsectarum, Dodecaedron prima compositarum aucto et operto Cubo. Epitome Astron. Copernicanae Pag. 458.

39) Je 6 ſolcher abzuſtumpfender Kanten liegen ſo wie 6 Hauptkanten des Kies12- und 20flachs; je 6 zu vergrößernde Rauten des regelmäßigen 30flachs, wie die 6 Rauten des Kies-30flachs.

40) Je 8 abzuſtumpfende Ecken liegen wie die 8 gleich 3kantigen Ecken des Kies12- und 30flachs; je 8 Flächen des regelmäßigen 20flachs wie 8 gleichſeitige Flächen des Kies20flachs.

Wir könnten nun fragen: warum tritt das Geſchlecht des regelmäßigen 12flachs nicht ſelbſtſtändig in der Kryſtallwelt außer aller Verbindung mit dem Würfelgeſchlecht auf? die Beantwortung dieſer Frage dürfte die tiefſte Einſicht in das Sternverhältniß der Erde fordern [41]).

Bis jetzt hat ſich, wie geſagt, kein Kryſtall von der Geſtalt des regelmäßigen 12- und 20flachs gefunden.

Ich will aber, abgeſehn von den Kryſtallen, das Geſchlecht des regelmäßigen 12flachs kürzlich für ſich betrachten und zeigen, daß die Art wie 4 ihm angehörige einfache Hauptkörper unter einander verwandt ſind, der Art höchſt ähnlich ſey, wie 4 Hauptkörper des Würfelgeſchlechts unter ſich verwandt ſind.

Die 4 Hauptkörper des regelmäßigen 12flach-Geſchlechts, welche 4 Hauptkörpern der Würfelſippe entſprechen, ſind:

1. Das regelmäßige 12flach. Es entſpricht dem Würfel.
2. Das regelmäßige 20flach. Es entſpricht dem 8flach.
3. Das Rautenzoflach. Es entſpricht dem Rauten-12flach.
4. Das 60flach. Es entſpricht dem Leuzit.

41) Hat es ſich beſtätigt, daß der Pflanzenſtaub einiger Blumen in regelmäßigen 12- und 20flachen vorkömmt, gehören dieſe Körper der höheren, ausgebildeteren Pflanzenwelt an?

A. Regelmäßiges 12flach und regelmäßiges 20flach.

Das 12flach hat 12 Flächen, 20 Ecken, 30 Kanten. Das 20flach hat 12 Ecken, 20 Flächen, 30 Kanten. Das 12flach hat alſo ſo viel Flächen als das 20flach Ecken, das 20flach ſo viel Flächen als das 12flach Ecken. Regelmäßige Abſtumpfung der Ecken des 12flachs führt zuletzt in das 20flach, regelmäßige Abſtumpfung der Ecken des 20flachs in das 12flach.

Es läßt ſich ein 12flach um ein 20flach beſchreiben, ſo daß die Flächenmitten des 12flachs mit den Ecken des 20flachs zuſammen treffen; — es läßt ſich ein 20flach um ein 12flach beſchreiben, ſo daß die Ecken des 12flachs in die Flächenmitten des 20flachs zu liegen kommen.

Die Zahl der Kanten beider Körper iſt gleich. Daß dieſe gegenſeitigen Verhältniſſe ganz denen zwiſchen Würfel und 8flach entſprechen, leuchtet ein.

B. Regelmäßiges 12= und 20flach im Verhältniſſe zum regelmäßigen 30flach.

Man hält das 30flach am beſten zwiſchen einer ſenkrechten 5kantigen Axe. Es hat 30 gleiche Rauten, 5 treffen an der obern, 5 an der untern Polecke zuſammen, 5 gränzen an jene obern, 5 an dieſe unter Flächen, 10 liegen in der Mitte, der ſenkrechten Axe #. Es hat ferner 12 5kantige, 20 3kantige Ecken und 60 Kanten (12 × 5 oder 20 × 3).

Je 10 Kanten (wie je 10 Flächen) ſind einer 5kantigen Axe #, daher der Kantenwinkel = dem Winkel des regelmäßigen 10ecks = 144°.

1. Es entſteht durch Abſtumpfung der 30 Kanten des 12flachs, wenn je 5 Abſtumpfungsflächen in der Mitte einer Fläche des 12flachs eine 5kantige Ecke bilden.

Gleichmäßig entſteht, wie wir wiſſen, das Rauten12flach durch Abſtumpfung der 12 Würfelkanten. Und wie 6 4kantige Ecken des Rauten12flachs in die Flächenmitten des umſchriebenen Würfels fallen, ſo 12 5kantige Ecken des Rauten30flachs in die Flächenmitten des umſchriebenen 12flachs.

Wie wir aus dem Rauten12flach durch Abſtumpfung der 6 4kantigen Ecken den eingeſchriebenen Würfel erzeugten, ſo aus dem Rauten30flach das eingeſchriebene 12flach durch Abſtumpfung der 12 5kantigen Ecken. Und zwar treffen die Kanten des eingeſchriebenen 12flachs in die kurzen Geren, die 12flachsecken in die 3kantigen Ecken des umſchriebenen 30flachs — ganz wie die kurzen Geren des umſchriebenen Rauten12flachs mit den Kanten, ſeine 3kantigen Ecken mit den Ecken des umſchriebenen Würfels zuſammentreffen. Zuletzt, wie man aus dem Würfel durch Aufſetzung von 6 4ſeitigen Pyramiden das Rauten12flach bilden konnte, ſo aus dem regelmäßigen 12flach durch Aufſetzung von 12 5ſeitigen Pyramiden das 30flach. Der Grundkantenwinkel jeder dieſer Pyramiden iſt ungefähr $31\frac{3}{4}$°, da 2 derſelben mehr dem Kanten-

winkel des regelmäßigen 12flachs (der $116\frac{1}{2}^{\circ}$) 180° betragen müſſen.

* * *

2. Das 30flach entſteht aus dem 20flach durch Abſtumpfung der 30 Kanten, wenn dieſe Abſtumpfung ſo weit gediehen iſt, daß je 3 Abſtumpfungsflächen in einer Flächenmitte des 20flachs eine 3kantige Ecke bilden.

Gleichmäßig entſteht das Rauten12flach aus Abſtumpfung der 8flachkanten. Und wie 8 3kantige Ecken des Rauten12flachs in die Flächenmitten des umſchriebenen 8flachs fallen, ſo 20 3kantige Ecken des 30flachs in die Flächenmitten des umſchriebenen 20flachs.

Wie wir aus dem Rauten12flach das 8flach durch Abſtumpfung der 8 3kantigen Ecken erzeugten, ſo das 20flach aus dem 30flach durch Abſtumpfung der 20 3kantigen Ecken. Und zwar treffen die Kanten des eingeſchriebenen 20flachs in die langen Geren, ſeine 12 Ecken in die 12 5kantigen Ecken des umſchriebenen 30flachs, ganz wie die Kanten des eingeſchriebenen 8flachs mit den langen Geren, ſeine Ecken mit den 6 4kantigen Ecken des umſchriebenen Rauten12flachs zuſammen trafen.

Zuletzt, ſo läßt ſich das 20flach in das (umſchriebene) 30flach verwandeln, indem man auf jede ſeiner Flächen eine 3ſeitige Pyramide aufſetzt — ſo wie wir das 8flach in das (umſchriebene!) Rauten12flach verwandelten, indem wir auf jede ſeiner Flächen eine 3ſeitige Pyramide aufſetzten.

Es fällt in die Augen, daß ſich das Rauten30flach ganz ſo zum regelmäßigen 12= und 20flach verhält, wie das Rauten12flach zum Würfel und 8flach.

Kepler kannte die Verwandtſchaft zwiſchen dem regelmäßigen 12=, 20= und 30flach. Er ſtellte auch ſchon das Rauten12flach und Rauten30flach als 2 gleichartige halbregelmäßige Körper zuſammen [42]. Hauy kennt ebenfalls die Verwandtſchaft von 12=, 20= und 30flach [43].

Nachdem ich die Aehnlichkeit der Verwandtſchaftsverhältniſſe zwiſchen den regelmäßigen 12=, 20= und 30=flache mit denen zwiſchen Würfel, 8flach und Rauten12=flach kennen gelernt, überlegte ich, ob ſich dieſe Aehnlichkeit nicht weiter verfolgen laſſe, ob ſie ſich nicht auch auf den Leuzit erſtrecke. Und ſo fand es ſich.

C. Verhältniß des 12=, 20= und 30flachs zum 60flach.

Der Körper, welcher in dem Geſchlecht des regelmäßigen 12flachs dem Leuzit entſpricht, iſt ein 60flach.

1. Das 60flach entſteht durch regelmäßige Abſtumpfung der 60 Kanten des 30flachs — wie der Leuzit durch Abſtumpfung der 24 Kanten des Rauten=12flachs. Seine 60 Flächen ſind Trapeze, wie die Flächen des Leuzits.

Je 4 Abſtumpfungen der 30flachkanten bilden zuletzt eine 4kantige Ecke in einer Flächenmitte des 30flachs. So hat das 60flach 30 ungleich 4kantige Ecken, welche

42) Harmonice mundi. S. 61 — 64.

43) Traité de Minéralogie IV. 82.

an die Stelle der 30 Flächen des ihm umſchriebenen 30flachs treten.

Eben ſo hat der Leuzit 12 ungleich 4kantige Ecken, welche in die Flächenmitten des ihm umſchriebenen Rauten12flachs fallen.

Und wie der eingeſchriebene Leuzit an der Stelle der 6 4kantigen und 8 3kantigen Ecken des ihm umſchriebenen Rauten12flachs 6 neue 4kantige und 8 neue 3kantige Ecken erhält, ſo das 60fl ch 12 neue 5kantige, 20 neue 3kantige an die Stelle der 12 5- und 20 3kantigen Ecken des ihm umſchriebenen 30flachs.

Regelmäßige Abſtumpfung der 30 ungleich 4kantigen Ecken des 60flachs, jede durch 4 Grundgeren führt in das dem 60flach eingeſchriebene 30flach. Ganz ſo wie die Abſtumpfung der 12 ungleich 4kantigen Leuzitecken jede durch 4 Grundgeren in das Rauten12flach führt. Und wie 24 jener Leuzitgeren mit den Kanten des eingeſchriebenen Rauten12flachs zuſammenfallen, ſo fallen 60 Geren des 60flachs (deren je 3 in einer 3kantigen Ecke zuſammenſtoßen) mit den 60 Kanten des 30flachs zuſammen. Je 10 ſolcher Geren ſind einer 5kantigen Axe des 60flachs #, 10 Queergeren, welche jene 10 unter rechtem Winkel ſchneiden, bilden ein regelmäßiges 10eck. Wie ferner die 6 4kantigen und 8 3kantigen Leuzitecken mit den 6 4kantigen und 8 3kantigen Ecken des eingeſchriebenen Rauten12flachs eins ſind, ſo die 12 5kantigen und 20 3kantigen Ecken des 60flachs mit den 12 5kantigen und 20 3kantigen des ihm eingeſchriebenen 30flachs. —

Aus dem eingeſchriebenen Rauten12flach bilden wir den umſchriebenen Leuzit, indem wir auf jede Rautenfläche eine Pyramide aufſetzten. Eben ſo bildet man das umſchriebene 60flach, indem man auf jede Fläche des 30flachs eine Pyramide aufſetzt. Da der Kantenwinkel des 30flachs = 144°, ſo muß jeder der 2 Grundkantenwinkel der 2 Pyramiden, welche in derſelben 30flachskante zuſammengränzen = 18° ſeyn, (2 × 18 + 144 = 180), und der Winkel, den 2 einander an einer Pyramidenecke gegenüber liegende Pyramidenflächen bilden, iſt ebenfalls 144°.

2. Aus dem Würfel entſteht der Leuzit durch 3flächige Zuſpitzung der Ecken, die Zuſpitzungsflächen auf die Seitenflächen aufgeſetzt. Die Neigung dieſer Zuſpitzungsflächen gegen die Axe fanden wir ſo: wir nahmen den Würfel mit abgeſtumpften Kanten — den Flächen des Rauten12flachs — und ſtumpften an dieſem die nach den Würfelecken zu gelegenen Anfänge der 12flachkanten regelmäßig ab.

Verfahren wir ganz ähnlich um aus dem regelmäßigen 12flach das 60flach zu erzeugen. Spitzen wir jede der 20 Ecken mit 3 Flächen zu, jede Zuſpitzungsfläche auf eine Fläche aufgeſetzt, ſo erhalten wir die 20 × 3 Flächen des 60flachs. Um aber die richtige Neigung der Zuſpitzungsflächen gegen die Axe zu erhalten, ſo nehmen wir das 12flach mit abgeſtumpften Kanten — den Flächen des 30flachs — und ſtumpfen an dieſem die nach den 12flachsecken zu gelegenen Anfänge der 30flachkanten regel-

mäßig ab. Aus ſolcher Abſtumpfung geht, wie wir wiſſen, das 60flach hervor.

Je 5 um eine Fläche des 12flachs gelegene Zuſpitzungsflächen der Ecken, bilden eine 5kantige 60flachsecke, welche in den Mittelpunkt der Fläche des umſchriebenen 12flachs trifft.

Wie hier 12 5kantige Ecken des eingeſchriebenen 60flachs in 12 Flächenmitten des umſchriebenen 12flachs; ſo treffen 6 Leuzitecken in die Flächenmitten des umſchriebenen Würfels. —

Durch Abſtumpfung jener 6 Leuzitecken, jede Abſtumpfungsfläche durch 4 in einer Ebene liegende 3kantige Ecken, rechtwinklig durch eine Hauptaxe gelegt, erhielten wir den dem Leuzit eingeſchriebenen Würfel, deſſen 8 Ecken alſo mit den 8 3kantigen Ecken des umſchriebenen Leuzits zuſammenfallen.

Eben ſo erhalten wir das 12flach aus dem 60flach, wenn wir die 12 5kantigen Ecken jede durch 5 in einer Ebene gelegene 3kantige Ecken, rechtwinklig durch eine 5kantige Axe abſtumpfen. Die 20 Ecken des eingeſchriebenen 12flachs fallen demnach mit den 20 3kantigen Ecken des umſchriebenen 60flachs zuſammen.

* * *

3. Aus dem 8flach entſteht der Leuzit, durch Zuſpitzung jeder Ecken mit 4 Flächen, die Zuſpitzungsflächen auf die Seitenflächen aufgeſetzt. Die Neigung der Zuſpitzungsflächen fanden wir, wie beim Würfel, durch Hülfe des 8flachs mit abgeſtumpften Kanten. (Siehe §. 13 A.)

Spitzen wir nun jede der 12 Ecken des 20flachs mit 5 Flächen zu, ſo erhalten wir 12 × 5 = 60 Flächen des 60flachs. Die Neigung der Zuſpitzungsflächen gegen die Axe beſtimmen wir, indem wir am 20flach mit abgeſtumpften Kanten die 12 × 5 nach den 20flachsecken zu gelegenen Anfänge der 30flachskanten abſtumpfen.

Wenn je 3 um dieſelbe Fläche des 20flachs gelegene Zuſpitzungsflächen in der Mitte jener Fläche eine 3kantige Ecke bilden, ſo iſt das dem 20flach eingeſchriebene 60flach vollendet.

20 3kantige Ecken dieſes 60flachs treffen demnach eben ſo in die Flächenmitten des ihm umſchriebenen 20flachs, wie 8 3kantige Leuzitecken in die Flächenmitten des dem Leuzit umſchriebenen 8flachs.

Durch Abſtumpfung jener 8 Leuzitecken, jede Abſtumpfungsfläche durch 3 benachbarte Hauptecken gelegt, erzeugt man das 8flach. Deſſen Ecken fallen alſo mit den Hauptleuzitecken zuſammen.

Eben ſo erhält man durch Abſtumpfung der 20 3kantigen Ecken des 60flachs, jede Abſtumpfungsfläche durch 3 der 3kantigen Ecke überzwerch gegenüber liegende 5kantige Ecken gelegt, das 20flach. Die 12 Ecken des 20flachs ſind eins mit den 12 5kantigen Ecken des 60flachs. —

* * *

Es entſpricht demnach die Verwandtſchaft des 12-, 20-, 30- und 60flachs auffallend der Verwandtſchaft von Würfel, 8flach, Rauten12flach und Leuzit.

12ſ und 20flach haben wie Würfel und 8flach nur Eine Art, Flächen, Kanten und Ecken.

Das 30flach hat wie das Rauten12flach gleiche Rauten, gleiche Kanten, und 2 Arten Ecken. —

Das 60flach hat, wie der Leuzit, Trapeze, wie dieſer 2 Arten Kanten, 12 × 5 längere und 20 × 3 kürzere; wie der Leuzit 3 Arten Ecken.

Das 30flach ähnelt im Ganzen dem Rauten12flach, das 60flach dem Leuzit. —

D. Das 120flach.

Durch Zuſchärfung der Kanten des 12ſ, 20ſ, 30ſflachs entſtehn Pyramiden12ſ, 20ſ, 30flache, welche den Pyramidenwürfel, Pyramiden8flach und Pyramiden-Rauten12flach entſprechen. Ich will nur noch kurz das Pyramiden30flach oder 120flach betrachten. Es hat 120 Flächen 3 × 60 Kanten, 12 10kantige, 20 6kantige, 30 4kantige, zuſammen 62 Ecken.

Aus dem 30flach entſteht es, wie erwähnt, durch Zuſchärfung aller Kanten (60 × 2 = 120), oder, indem man auf jede Raute eine ſehr ſtumpfe 4ſeitige Pyramide aufſetzt. Der Grundkantenwinkel derſelben muß kleiner als 18° ſeyn, weil, wie wir ſahen, ſonſt das 60flach erzeugt würde. —

Aus dem 12flach entſteht das 120flach, indem man jede Ecke mit 6 Flächen zuſpitzt (20 × 6 = 120).

Aus dem 20flach entſteht das 120flach durch Zuſpitzung jeder Ecke mit 10 Flächen (12 × 10 = 120).

Aus dem 60flach bildet man das 120flach, indem man jede der 30 ungleich 4kantigen Ecken mit 4 Flächen zuſpitzt. (30 × 4 = 120).

Es ergiebt ſich, daß ſich das 120flach ganz ſo zum 30flach, 12flach, 20flach und 60flach verhält, wie das 48flach zum Rauten12flach, Würfel, 8flach und Leuzit.

120flach und 48flach ſtellen in beiden Geſchlechtern die größte Annäherung zur Kugelform dar [44]).

*   *   *

E. Abweichungen.

So auffallend die dargethane Aehnlichkeit der Verwandtſchaftsverhältniſſe des 12flach-Geſchlechts mit denen des Würfelgeſchlechts iſt, ſo finden ſich doch folgende Abweichungen.

44) Stumpft man Ecken und Kanten des 48flachs ab, ſo erhält man einen Körper, der die Flächen der meiſten aufgeführten einfachen Körper aufweißt, nämlich:

1)	Flächen des 48flachs ſelbſt — — — —	48
2)	— — Würfels — — — — —	6
3)	— — 8flachs — — — — —	8
4)	— — 12flachs — — — — —	12
5)	— — Leuzits — — — — —	24
6)	Flächen eines Pyramidenwürfels, durch Abſtumpfung von 6 × 4 kürzern Kanten, die in den 6 8kantigen Ecken zuſammentreffen —	24
7)	Flächen eines Pyramiden8flachs durch Abſtumpfung der 8 × 3 kürzern Kanten die in den 8 6kantigen Ecken zuſammentreffen — —	24
	Zuſammen	146 Flächen.

Stumpft

1. Wir hatten das 12flach dem Würfel, das 20flach dem 8flach verglichen. So ſtellte Kepler ſchon dieſe Körper einander gegenüber [54]). Allein das 30flach tritt in einiger Hinſicht zum regelmäßigen 12flach in ein Verhältniß, in welchem das Rauten12flach nicht zum Würfel, ſondern zum 8flach ſteht. Der große Rautenwinkel des Rauten12flachs iſt = dem Kantenwinkel des 8flachs, dagegen der große Rautenwinkel des 30flachs nicht dem Kantenwinkel des 20flachs ſondern des regelmäßigen 12flachs gleich iſt [46]).

Stumpft man Ecken und Kanten des 120flachs ab, ſo erhält man einen Körper, der die Flächen der meiſten einfachen Körper des regelmäßigen 12flachgeſchlechts hat, nämlich:

1)	Flächen des 120flachs ſelbſt — — — —	120
2)	— — 12flachs — — — — —	12
3)	— — 20flachs — — — — —	20
4)	— — 30flachs — — — — —	30
5)	— — 60flachs — — — — —	60
6)	Flächen des Pyramiden12flachs durch Abſtumpfung der 20 × 5 kürzern Kanten die in den 12 10kantigen Ecken zuſammentreffen —	60
7)	Flächen des Pyramiden20flachs durch Abſtumpfung der 20 × 3 kürzern Kanten die in den 20 6kantigen Ecken zuſammentreffen — —	60
	Zuſammen	362 Flächen.

Schneide den Körper.

45) Harmonice mundi p. 181.

46) Nach Hauy. Betrachte das regelmäßige 12flach mit abgeſtumpften Kanten — den Flächen des 30flachs. Die Anfänge von je

10 Kan-

2. Je 6 Kanten des Rauten12flachs laufen einer *dreikantigen* Axe gleich; dagegen je 10 Kanten des 30flachs nicht einer 3kantigen ſondern einer *fünfkantigen* Axe # ſind.

3. Die Entſtehung des Rauten12flachs kann man ſich, wie wir ſahen, ſo denken, daß man einen Würfel in 6 4ſeitige Pyramiden zerlegt, und dieſe 6 Pyramiden auf die 6 Flächen eines gleich großen Würfels ſtellt.

Das 30flach läßt ſich nicht ſo aus dem regelmäßigen 12flach herleiten, wie Hauy ſchon gegen Romé de l'Isle bewies. Man zerlege das regelmäßige 12flach durch ſeine Kanten in 12 Pyramiden, deren Grundflächen die Flächen des 12flachs, deren Spitzen im Mittelpunkt des 12flachs. Der Grundkantenwinkel jeder Pyramide iſt = dem halben Kantenwinkel des 12flachs, ungefähr $= \frac{116}{2} = 58^\circ$. 2 ſolche Grundkantenwinkel mit dem Kantenwinkel des 12flachs vereint, betragen daher $116^\circ + 58^\circ + 58^\circ = 232^\circ$ mithin 52° mehr als 2 Rechte. 2 ſolche Pyramiden auf 2 benachbarte Flächen des 12-

10 Kanten des 30flachs laufen # einer Flächenaxe des 12flachs.

Je 2 jener Kanten ſtoßen daher in einer 3kantigen Ecke unter demſelben ſtumpfen Winkel zuſammen, unter welchen ſich die 2 Flächenaxen, denen ſie # ſind, ſchneiden. Dieſer Schnittwinkel iſt = dem Kantenwinkel des 12flachs, daher auch der Winkel, den beſagte 2 Kanten bilden, d. i. der ſtumpfe Winkel der Raute des 30flachs.

flachs aufgeſetzt, bilden alſo an der 12flachskante, in welcher ſie an einander grenzen, einen einſpringenden Winkel.

4. An die Würfelſippe ſchließt ſich die Nebenſippe des 4flachs an. Läßt ſich ein Körper bilden, der ſich zum 12- und 20flach eben ſo verhält, wie das Vierflach zum Würfel und 8flach? Nein. Nähme das 12flach die Stelle des Würfels, das 20flach die Stelle des 8flachs ein, ſo müßte der geſuchte Körper folgende Verhältniſſe zeigen. Er müßte ſo viel Kanten haben als das 12flach Flächen, alſo 12, die Zahl ſeiner Flächen müßte gleich ſeyn der Zahl ſeiner Ecken, und die Summe der Flächen und Ecken = 20 = der Flächenzahl des 20flachs ſeyn. Aber ein Körper von 10 Flächen müßte wenigſtens, bei 3ſeitigen Flächen, $\frac{3 \times 10}{2} = 15$ Kanten haben, alſo mehr als er haben dürfte, wenn ſeine Kantenzahl der Flächenzahl des 12flachs entſprechen ſollte

Eben ſo wenig erhält man einen dem 4flach entſprechenden Körper, wenn man das 12flach an die Stelle des 8flachs, das 20flach an die Stelle des Würfels ſetzen wollte.

§. 35.

Ein Blick auf das Würfelgeſchlecht.

Hier eine Art Stammbaum der einfachen Hauptkörper des Würfelgeſchlechts. Sie laſſen ſich — den 6ten und 10ten ausgenommen — unmittelbar oder

mittelbar aus dem einfachſten Körper, dem 4flach, durch regelmäßige Abſtumpfung erzeugen.

1) 4flach

abgeſt. Kanten — abgeſt. Ecken.

2) Würfel — 3) 8flach

abgeſt. Kanten — abgeſt. Kanten

4) Rauten12flach

abgeſt. Kanten — zugeſchärfte Kanten

5) Leuzit — 6) Pyramidenrauten12fl.

abgeſt. längere K. (24 — 12) — abgeſt. kürzere K.

7) Pyramidenwürf. — 8) Kies12flach — 9) Pyramiden8flach

zugeſpitzte | 8 Ecken.

10) Kies24flach [47]).

Das 4flach geht durch Abſtumpfung der Kanten in den Würfel, weiter durch Abumpfung der Würfelkanten in das Rauten12flach über. Will man das 4flach unmittelbar in ein Rauten12flach verwandeln, ſo geſchieht es durch Zuſpitzung der Ecken.

Durch Abſtumpfung verwandelt man den Würfel in ein Rauten12flach, dieſes in einen Leuzit, dieſen in

47) Das Pyramiden4flach habe ich als einen halben Leuzit nicht eigens aufgeführt.

einen Pyramidenwürfel, welchen man aus dem Würfel unmittelbar durch Zuſchärfung der Kanten erhält.

Dieſe 2 Beiſpiele, zu welchen der Leſer aus dem Stammbaum noch viele hinzufügen kann, zeigen, wie Zuſchärfungen und Zuſpitzungen einen einfachen Körper des Würfelgeſchlechts in einen 2ten von größerer Flächenzahl unmittelbar verwandeln, in welchen er durch Abſtumpfungen mittelbar übergehen kann.

Jede Abſtumpfung, Zuſchärfung, Zuſpitzung eines einfachen Körpers des Würfelgeſchlechts erzeugt für ſich einen vollſtändigen neuen Körper. So viele Arten Flächen ein zuſammengeſetzter Körper des Würfelgeſchlechts hat, ſo viel vollſtändige einfache Körper können aus ihm gebildet werden, falls man jede einzelne Art Flächen ſo vergrößert, daß die übrigen Flächen ſchwinden. Z. B. aus einem Würfel mit zugeſchärften und wieder abgeſtumpften Kanten, auch abgeſtumpften Ecken, läßt ſich

1. ein Pyramidenwürfel bilden, wenn man die 24 Zuſchärfungsflächen ſo vergrößert, daß die übrigen Flächen nichts werden.
2. ein Rauten12flach, wenn man mit den Abſtumpfungsflächen der Kanten,
3. ein 8flach, wenn man mit den Abſtumpfungsflächen der Ecken,
4. ein Würfel, wenn man mit den Ueberbleibſeln der Würfelflächen eben ſo verfährt, wie im erſtern Falle mit den Zuſchärfungsflächen.

Wir

Wir werden bei den folgenden Kriſtallgeſchlechtern finden, daß häufig mehrere Arten von Abſtumpfungen und Zuſchärfungen zuſammen eintreten müſſen, um einen vollſtändigen neuen Körper zu bilden.

Wir haben geſehen, daß ſich Reihen von Körpern denken laſſen, welche dem Leuzit, Pyramiden8flach, Pyramidenwürfel und Kies12flach ähneln [48]). Die im Stammbaum aufgeführten Leuzit, Pyramiden8flach, Pyramidenwürfel und Kies12flach erſcheinen als die Hauptkörper jener Reihen. — Z. B. der Leuzit, welcher aus regelmäßiger Abſtumpfung der Kanten des Rauten12flachs hervorgeht, und in der Mitte ſteht zwiſchen den Leuzitähnelnden Körpern die durch Zuſpitzung der 4kantigen und denen die durch Zuſpitzung der 3kantigen Ecken des Rauten12flachs erzeugt werden.

Folgende 4 Figuren ſpielen im Würfelgeſchlecht eine große Rolle:

1. das Geviert,
2. das Würfelrechteck,
3. die Raute des Rauten12flachs [49]),
4 Die Kiesraute.

48) Das Pyramiden4flach führe ich auch hier als halben Leuzit nicht beſonders auf. Auch nicht das Pyramidenrauten12flach, weil ich über das Weſen des Normal Pyramidenrauten12flachs noch im Dunkeln bin.

49) Ich wiederhole, daß ſich die kurze Gere, die lange Gere und die Seite der 12flachsraute zu einander verhalten, wie die Kante, die Gere und die halbe Axe des Würfels. Das Würfelrechteck

Der Leſer kann nach allem Vorhergehenden leicht zuſammenſtellen, bei welchen Körpern ſie ſich finden.

Wir erforſchten das Verhältniß eines Würfels der um, zu einem der in ein (und daſſelbe) 8flach beſchrieben war, und viele entſprechende Verhältniſſe.

Dies führt auf allgemeine Betrachtung der ähnlichen Körper, welche ich jedoch nur andeuten will.

Die Mathematik unterſcheidet Geſtalt und Größe.

Der Geſtalt nach ſind 2 (oder mehrere) Körper einander ähnlich [50]) oder unähnlich, der Größe nach gleich oder ungleich.

Der Geſtalt und Größe nach ſind 2 (oder mehrere) Körper

1. gleich und ähnlich, von gleicher Geſtalt und gleichem Gehalt. Wie ſich 2 gleich und ähnliche Figuren decken, ſo ſtelle man ſich vor, 2 gleich und ähnliche (congruente) Körper paßten in Ein und dieſelbe hohle Form.

felrechteck wird durch 2 Geren in 4 halbe 12flachsrauten zerlegt — die 12flachsraute durch 2 Geren in 4 halbe Würfelrechtecke.

50) Euclid; Buch XI. Erklärung IX. „Aehnliche Körper ſind die von gleich vielen ähnlichen Flächen begränzt werden.“ — Dies reicht nicht aus. Man ſetze z. B. auf 2 #e Würfelflächen 2 4ſeitige Pyramiden, deren Grundkantenwinkel kleiner als 45°. Man ſetze dieſelben Pyramiden auf 2 benachbarte Würfelflächen. Nach Euclid's Erklärung müßten beide Körper einander ähnlich ſeyn, wie unähnlich ſie aber ſind, iſt klar.

2. Gleich und unähnlich von gleichem Gehalt aber ungleicher Geſtalt. Z. B. ein hohler Würfel und eine hohle Kugel, welche gleich viel Waſſer faſſen.

3. Ungleich und ähnlich, von gleicher Geſtalt aber ungleichem Gehalt. Dieſer Fall iſt in der Kryſtall-Lehre vorzüglich häufig. Von 2 ſolchen Körpern iſt der kleinere anzuſehn, als ſey er der größere im verjüngten Maasſtabe, als ſeyen in ihm alle Linien des größeren in ein und demſelben Verhältniſſe verkleinert. Kennt man daher das Verhältniß auch nur einer Linie des größeren Körpers zu einer gleichartigen Linie des ihm ähnlichen kleinern, ſo kennt man das Verhältniß aller Linien beider Körper. Iſt z. B. die Kante eines Würfels A, $\frac{1}{2}$ der Kante eines 2ten B, ſo iſt auch die Gere von A, $\frac{1}{2}$ der Gere von B, eben ſo die Axe ꝛc. [51]).

Der kleinere Körper läßt ſich in den ihm ähnlichen größern ſo beſchreiben, daß alle ſeine Flächen den Flächen des größern # ſind, und alle ſeine Axen Theile der Axen des größern.

4. Ungleich und unähnlich, ungleich an Geſtalt und Gehalt.

51) Ich gieng bei Vergleichung z. B. von einem um und einem in daſſelbe 8flach beſchriebenen Würfel, das Verhältniß aller Arten von Linien — der Kanten, Geren, Axen ꝛc. — genau durch, obgleich es doch nach Obigem an Erfaſſung Eines ſolchen Verhältniſſes genügt hätte. Ich hoffte aber eben hierdurch dem Anfänger das Eigene ähnlicher Körper recht feſt einzuprägen.

Das Würfelgeſchlecht ſcheint an der Spitze aller übrigen Kryſtallgeſchlechter zu ſtehen, alle dürften nur als geſetzmäßige Abweichungen von demſelben anzuſehn ſeyn. Bei jedem dieſer Kryſtallgeſchlechter werde ich daher ſein Verhältniß zum Würfelgeſchlecht betrachten. Zuerſt wie ſeine einfache Grundgeſtalt (oder Grundgeſtalten) ſich zum Würfel und 8flach verhalten. Iſt die Art und das Geſetz ihrer Abweichung beſtimmt, ſo ergiebt ſich — nach dem Geſetz des Ebenmaaßes — die Regel aller Umgeſtaltungen. Ich hoffe dies bei der folgenden Darſtellung des Geſchlechts des Rautenflachs klar zu zeigen.

Ich ſchließe mit einer allgemeinen Betrachtung. — In der Mathematik — wie faſt in jeder Wiſſenſchaft — beginnt man gewöhnlich mit den umfaſſendſten allgemeinſten Begriffen und Beweiſen. Man ſpricht von dem Weſen des 3ecks, 4ecks ꝛc. überhaupt. Wäre es nicht beſſer von den regelmäßigſten ſchönſten Dreiecken, dem gleichſeitigen und rechtwinklig gleichſchenkligen auszugehn, von da zu den übrigen gleichſchenkligen und rechtwinkligen und zuletzt zu den ganz unregelmäßigen fortzuſchreiten? Eben ſo beim 4eck ꝛc. — Wäre es nicht faßlicher zuförderſt einfach an einem durch eine Gere getheilten Geviert zu zeigen, daß das gleichſchenklige rechtwinklige △ 2 Rechte habe, und dann erſt den Beweis für alle △e zu geben? Sollte man nicht vorher am gleichſchenkligen rechtwinkligen △ den pythagoreiſchen Lehrſatz anſchaulich machen, ehe man den Beweis für alle rechtwinkligen △e ſuchte? — Hat ſich nicht die Mathema-

tik ſelbſt ſo entwickelt, daß man das Anſchaulichſte, Einfachſte, Regelmäßigſte, Schönſte zuerſt gefunden, und von dieſem zum Zuſammengeſetzten, Unregelmäßigen, abgezogen Verſtändigen fortgeſchritten iſt? — So glaube ich, muß auch beim Lehrern der Kryſtallkunde vom Einfachſten, Schönſten, Regelmäßigſten, Anſchaulichſten zum Zuſammengeſetzten, Unregelmäßigen, abgezogen Verſtändigen fortgeſchritten werden. Gewöhnlich beginnt man auch hier mit den allgemeinſten Begriffen. Man giebt die umfaſſendſte Definition eines 8flachs, und zählt dann die mannigfaltigen Arten deſſelben auf, unter dieſen auch das regelmäßige. Eben ſo geht man von dem ſehr weiten Begriffe eines Parallelepipedums aus, dem dann unter andern auch der Würfel untergeordnet iſt. Ich glaube man ſollte mit Betrachtung des regelmäßigen 8flachs beginnen, und von dieſem zu den übrigen als zu Abweichungen vom regelmäßigen 8flach übergehn. Z. B. zu den 8flachen welche entſtehn, wenn man eine Axe des regelmäßigen 8flachs verlängert oder verkürzt ꝛc. Eben ſo ſollte man mit Betrachtung des Würfels beginnen, und dann zeigen, wie ſich das Rautenflach, die geſchobene 4ſeitige Säule ꝛc. kurz alle übrigen Parallelepipeden zu ihm verhalten. — Und wie man mit Betrachtung der einzelnen einfachſten regelmäßigen Körper beginnen ſollte, ſo auch mit Betrachtung des einfachſten, regelmäßigſten Geſchlechts, welches jene Körper in ſich faßt, mit Betrachtung des Würfelgeſchlechts. Der Schüler muß dieſes gründlich gefaßt haben, ehe er ſich zu den verwickelten Kryſtallgeſchlechtern wendet. Geſchähe es nicht um der unreifen Faſſungskraft willen, welche nur des

Einfachern mächtig werden kann, dann deshalb, weil eben das Würfelgeſchlecht Wurzel aller übrigen Geſchlechter, weil in ihm der Augenpunkt, aus welchem alle betrachtet werden müſſen, um richtig aufgefaßt zu werden.

II.

Das Geſchlecht

des

Rautenflachs.

§. 36.

Der Würfel.

Betrachten wir den Würfel noch einmal.

Seine 6 Flächen ſind Gevierte, welche 6 × 4 rechte Winkel und 6 × 2 gleiche Geren haben.

Seine 12 Kanten ſind gleich lang, rechtwinklig, je 4 ſind #.

An jeder ſeiner 8 Ecken treffen 3 rechte Winkel und 3 rechtwinklige Kanten zuſammen.

Jede Gere bildet mit 2 angränzenden unter einander #en Kanten rechte Winkel.

Die Axe macht mit einer Kante einen Winkel von ungefähr 55°, mit einer Gere von ungefähr 35°.

4 Axen, welche 4 Paar Ecken verbinden, ſind gleich. Von 3 Flächenaxen iſt jede # 4 Kanten, von 6 Kantenaxen iſt jede # 2en Geren. Die Flächenaxe iſt einer Kante, die Kantenaxe einer Gere gleich.

Das Geviert der Würfelkante verhält ſich zu dem der Gere, dieſes zu dem der Axe wie 1 : 2 : 3; wenn die Würfelfläche 1 Zoll im Geviert betrüge, ſo würde das Geviert der Gere 2 Zoll, daß der Axe 3 Zoll im Geviert enthalten.

§. 37.

Verhältniß des Würfels zum Rautenflach.

Ein Rautenflach hat, wie der Würfel, 6 gleiche Flächen, 12 gleich lange Kanten, 8 3kantige Ecken, 4 Eck-, 3 Flächen-, 6 Kanten-Axen. Je 4 ſeiner Kanten ſind ⋕, wie je 4 Würfelkanten.

Es unterſcheidet ſich vom Würfel:

1. Weil ſeine 6 Flächen nicht Gevierte, ſondern Rauten ſind, daher es nicht 6 × 4 rechte Flächenwinkel hat, ſondern 6 × 2 gleiche ſtumpfe, 6 × 2 gleiche ſpitze; nicht 6 × 2 gleiche Geren, ſondern 6 lange und 6 kurze.

2. Weil es nicht 12 rechtwinklige Kanten hat, ſondern 6 gleiche ſtumpfe und 6 gleiche ſcharfe. Ein ſtumpfer und ein ſpitzer Kantenwinkel betragen zuſammen 2 Rechte.

3. Weil nur in 2en ſeiner Ecken 3 gleiche Flächenwinkel und 3 gleiche Kanten zuſammentreffen. An jeder der 6 übrigen Ecken ſtoßen 2 einander gleiche und ein dieſen ungleicher Winkel, 2 einander gleiche und eine dieſen ungleiche Kante zuſammen.

4. Weil keine ſeiner Geren mit 2 angrenzenden einander ⋕en Kanten rechte Winkel bildet.

5. Weil nur 3 ſeiner Eck-Axen gleich ſind, die 4te aber von dieſen abweicht.

6. Weil nicht alle ſeine Kantenaxen gleich ſind, ſondern 3 längere ſind unter ſich gleich, und 3 kürzere desgleichen. Jede längere Kantenaxe iſt = einer, # 2 langen Geren; jede kürzere Kantenaxe iſt = einer, # 2 kurzen Geren.

7. Weil ſeine Flächen- und Kantenaxen zwar die Mitten je 2er #er Flächen und Kanten durch den Mittelpunkt des Rautenflachs hindurch verbinden, aber nicht, wie beim Würfel, rechtwinklig auf Flächen und Kanten treffen — daher auch nicht völlig dem Begriff von Axen entſprechen.

So unterſcheiden ſich alle Rautenflache vom Würfel.

§. 38.

Der Würfel ſteht in der Mitte zwiſchen 2 einander entgegengeſetzten Reihen der Rautenflache.

Man verfertige das Kantengeripp eines Würfels etwa aus Drath. Eine Axe werde durch einen ſtarken Drath dargeſtellt, der über die 2 Ecken ſo weit hinausreicht, daß die Länge des ganzen Draths gleich ſey dreien Würfelkanten [52]). Das Kantengeripp ſey verſchiebbar. Man ziehe es nun in der Richtung des Axendraths in die Länge, ſo erhält man eine Reihe zunehmend ſpitzer Rautenflache. Umgekehrt drücke man das Würfel-

52) Der Drath wird dann, wie wir weiter unten ſehen werden, um etwas länger ſeyn, als nöthig.

kantengeripp in der Richtung des Axendraths zuſammen, ſo erhält man eine Reihe zunehmend ſtumpfer Rautenflache.

Wir haben die gemeinſamen Eigenſchaften aller Rautenflache, und das, worin ſie ſich vom Würfel unterſcheiden, betrachtet.

Wie unterſcheiden ſich nun die ſpitzen Rautenflache von den ſtumpfen?

1. Was bei der angegebenen künſtlichen Art die Rautenflache aus einem Würfelkantengeripp zu bilden zunächſt in die Augen ſpringt: bei den ſpitzen Rautenflachen tritt eine Axe durch ihre größere Länge vor den 3 übrigen heraus, bei den ſtumpfen dagegen durch ihre geringere Länge. Dieſe eine heraustretende Axe heiße vorzugsweiſe die Axe ſchlechtweg, die übrigen 3 ſollen Randaxen heißen, weil ſie, wie wir gleich ſehen werden, 3 Paar Randecken verbinden.

Denken wir uns bei den folgenden Betrachtungen des Rautenflachs, die Axe immer ſenkrecht.

2. Die 2 Enden einer Axe heißen Pole. Nennen wir die 2 Ecken an den Polen der Rautenflachaxen Polecken. An jeder dieſer 2 Ecken ſtoßen 3 gleiche Winkel zuſammen, die wir Polwinkel nennen wollen, und 3 gleiche Kanten, die Polkanten heißen mögen. Beim ſtumpfen Rautenflach ſind nun die 3 und 3 Polwinkel ſtumpf, beim ſpitzen ſpitz. Eben ſo ſind die 3 und 3 Polkanten beim ſtumpfen Rautenflach ſtumpf, beim ſpitzen ſcharf.

3. Außer den 2 Polecken hat das Rautenflach 6 andere Ecken, die wir *Randecken* nennen wollen [53]. Je 3 obere liegen in einer 3ſeitigen Ebene, je 3 untere in einer zweiten Ebene. Beide Ebenen ſind einander ⧺ und ſchneiden die Axe ſenkrecht. Die 6 Kanten, deren Endpunkte in die Randecken fallen, ſollen *Randkanten* heißen. Beim ſpitzen Rautenflach ſind ſie ſtumpf, beim ſtumpfen ſcharf. Die 3 obern und 3 untern Geren, deren Endpunkte in 3 obere und 3 untere Randecken treffen, nennen wir *Randgeren*. 3 obere Randgeren bilden ein gleichſeitiges △, daß wir das obere *Randdreieck* nennen wollen, 3 untere Randgeren ſchließen das untere Randdreieck ein [54]. An jeder Randecke eines ſpitzen Rautenflachs ſtoßen 2 ſtumpfe und 1 ſpitzer Winkel, 2 ſtumpfe Randkanten und 1 ſcharfe Polkante zuſammen. An jeder Randecke eines ſtumpfen Rautenflachs umgekehrt 2 ſpitze und ein ſtumpfer Winkel, 2 ſcharfe Randkanten und eine ſtumpfe Polkante.

3 Geren, welche von der obern Polecke nach den untern Randecken laufen, ſollen obere *Polgeren*, 3, welche von der untern Polecke nach den 3 obern Randecken laufen, untere Polgeren heißen. Beim ſpitzen Rautenflach ſind ſie länger, beim ſtumpfen kürzer als die Randgeren.

4. Eine Polkante des ſpitzen Rautenflachs bildet mit zweien einander ⧺en ihr angrenzenden Polgeren an der

53) Der Ausdruck „Randecken“ iſt aus Herrn *Kerſtens* Ueberſetzung von *Brochants* Werk über Kryſtalliſation entlehnt.

54) Bemerke daß die Randecken Endpunkte der Randaxen, Randkanten, Randgeren, Winkelpunkte der Randdreiecke ſind.

Polecke einen ſpitzen, an der Randecke einen ſtumpfen Winkel. Umgekehrt verhält es ſich beim ſtumpfen Rautenflach. — Weil beſagte Polgeren # ſind, ſo betragen der ſpitze und der ſtumpfe Winkel zuſammen 2 Rechte. Den Schnitt durch 2 #e Polkanten und 2 #e Polgeren nenneu wir (mit Hauy) Hauptſchnitt, die eben betrachteten Winkel Hauptſchnittswinkel.

5. Mit der Axe bildet die Polkante des ſtnmpfen Rautenflachs einen Winkel der $> 55^{\circ}$, die Polkante des ſpitzen einen Winkel der $< 55^{\circ}$.

Mit der Polgere bildet die Axe des ſtumpfen Rautenflachs einen Winkel der größer, die Axe des ſpitzen einen Winkel der kleiner als 35°. (Vergl. den Würfel).

§. 39.

Die Enden der Reihe ſpitzer Rautenflache.

Nehmen wir nochmals das Würfelkantengeripp. Bilden wir durch Auseinanderziehn deſſelben in der Richtung des Axendraths die Reihe zunehmend ſpitzer Rautenflache, und ſuchen wir die Aeußerſten dieſer Reihe.

I. Winkel.

1. Flächenwinkel.

A. Spitze.

a. Der ſpitzeſte ſey größer als 0°.

b. Der wenigſt ſpitze kleiner als 90°.

B. Stumpfe.

a. Der ſtumpfſte ſey kleiner als 180°.

b. Der wenigſt ſtumpfe größer als 90°.

2. Kantenwinkel.

A. Polkantenwinkel (Spitze)

a. Der ſpitzeſte ſei kleiner als 60°.

Dies ergiebt ſich ſchon aus der Betrachtung, daß 60° der Winkel der gleichſeitigen 3ſeitigen Säule, welche als das unerreichbare Aeußerſte einer ſpitzen 3ſeitigen Pyramide mit abgeſtumpfter Polecke betrachtet werden kann. Es läßt ſich ſo beweiſen. Fig. 62. Aus den Kreuzpunkten a und b zweier Geren (der Mitten zweier Rauten) fälle ac und bc ſenkrecht auf die Polkante de. Der Winkel acb iſt alſo der Winkel der Kante. Ziehe die halben Randgeren ad und db. Das △ acd ≅ △ dcb. (1 S. 3 W.) ad und db die zwei gleichen Hypotenuſen der beiden rechtwinkligen △e ſind länger als die beiden gleichen Katheten ac und cb. Denkt man ſich nun acb und adb als gleichſchenklige △e auf derſelben Grundlinie ab, ſo muß der Winkel adb kleiner als der Winkel acb ſeyn, da er von zwei längern Schenkeln gebildet wird. Der Winkel adb iſt aber bei allen Rautenflachen von 60°, weil er einer von 3 Winkeln des gleichſeitigen, durch 3 gleiche Randgeren gebildeten △s iſt. Der Polkantenwinkel aller Rautenflache, auch der ſpitzeſten, muß daher größer als 60° ſeyn. Fig. 62

b. Der wenigſt ſpitze (Polkantenwinkel) ſei kleiner als 90°

B. Randkantenwinkel (Stumpfe).

a. Der wenigſt ſtumpfe ſei größer als 90°.

b. Der möglichſt ſtumpfe ſei kleiner als 120°.

Denn er beträgt mit dem möglichſt ſpitzen Polkantenwinkel zuſammen 180°. Da dieſer Polkantenwinkel aber größer als 60° ſeyn muß, ſo darf der Randkantenwinkel nicht volle 120° betragen.

Dies ergiebt ſich auchaus der Betrachtung, daß — wie wir unten genauer ſehn werden — die Seitenkanten einer regelmäßigen 6ſeitigen Säule, deren jede 120° beträgt, als die unmöglichen Aeußerſten der bis zum Gleichlaufen geſteigerten Randkanten des unmöglichen ſpitzeſten Rautenflachs angeſehn werden können [55].

II. Linien.

Kanten, 2 Geren und Axe ſind die 4 Hauptlinien. Die Kanten bleiben ſich gleich, wie ſchon aus der angegebenen Weiſe aus einem Würfelkantengeripp eine Reihe zunehmend ſpitzer Rautenflache zu bilden, hervorgeht. Die Polgere wächſt im Verhältniß als die Randgere abnimmt, die Hauptaxe wächſt im Verhältniß als die Randaxen abnehmen. Betrachten wir dieſes genauer, indem wir das Verhältniß von Kante, Gere und Axe beim Würfel zum Grunde legen.

Wenn beim ſpitzen Rautenflach, welches dem Würfel am nächſten ſteht, Pol- und Randgere faſt gleich ſind, ſo wird die Randgere beim möglichſt ſpitzen Rautenflach faſt 0, die Polgere fällt faſt mit 4 Kanten ihrer Raute zuſammen, erreicht faſt die Länge zweier Kanten. —

Bilde

55) Vergleiche Hauy's Var. dilatée und contractée Tafel 24. Fig. 20. 21.

Bilde ein △ aus der Axe, einer Polgere und einer Polkante, welche mit der Polgere in einer Randecke zuſammenſtößt. Der Winkel der Polgere mit der Polkante darf nicht 180° ſeyn, weil ſonſt beide Linien mit der Axe zuſammenfielen. Sie ſind alſo länger als die Axe. Da die Polgere nicht völlig = 2en Kanten, Polgere und Kante aber zuſammen größer ſind als die Axe, ſo iſt die Axe des ſpitzeſten Rautenflachs nicht völlig = 3en Kanten [56]), die Polgere aber nicht völlig = $\frac{2}{3}$ der Axe.

Die Randgere iſt beim wenigſt ſpitzen Rautenflach größer als die Kante, beim möglichſt ſpitzen faſt 0. Da die Kanten in der oft erwähnten Reihe der Rautenflache ſich gleich bleiben, ſo muß in dieſer Reihe eins ſeyn, deſſen Kante der Randgere gleich. Dies iſt der Fall beim ſpitzen Rautenflach, deſſen Rautenwinkel 60° und 120°. Denn die Randgere, welche die Randeckwinkel von 120° hälftet, bildet 2 gleichwinklige mithin gleichſeitige △e, iſt daher der Kante gleich.

§. 40.

Die Enden der Reihe ſtumpfer Rautenflache.

Bilden wir nun aus dem Würfelkantengeripp eine Reihe immer ſtumpfer werdender Rautenflache, indem wir dies Geripp in der Richtung des Axendraths zuſammendrücken. Wie werden die Enden dieſer Reihe ſeyn?

56) Darum konnte (§. 38.) die Länge des Axendraths im Würfelkantengeripp um ein Geringſtes kürzer ſeyn, als die Länge 3er Kanten beträgt.

I. Winkel.

1. Flächenwinkel.

A. Stumpfe.

a. Beim ſtumpfen Rautenflach, das dem Würfel am nächſten, iſt er etwas größer als 90°.

b. Beim möglichſt ſtumpfen Rautenflach iſt er etwas kleiner als — — — — 120°.

Denn 3 ſolcher ſtumpfen Winkel liegen um einer Polecke. Wäre ein Winkel = 120°, ſo wären 3 = 360° = 4 Rechten. Dies iſt aber nicht möglich, da die Winkel um den Punkt einer Ebene — welcher als die unmögliche ſtumpfſte Ecke betrachtet werden könnte — 360° betragen.

B. Spitze.

a. Der mindeſt ſpitze ſey etwas kleiner als 90°.

b. Der möglichſt ſpitze ſey größer als 60°

denn letzterer ergänzt den möglichſt ſtumpfen zu 180°.

Da der möglichſt ſtumpfe aber kleiner als 120° ſeyn muß, ſo muß auch ſein Ergänzungswinkel größer als 60° ſeyn.

2. Kantenwinkel.

A. Polkantenwinkel (Stumpfe).

a. Der mindeſt ſtumpfe ſey größer als 90°.

b. Der möglichſt ſtumpfe ſey kleiner als 180°.

B. Randkantenwinkel (Spitze).

a. Der wenigſt ſpitze ſey kleiner als 90°.

b. Der möglichſt ſpitze ſey größer als 0°.

II. Linien.

Kante. 2 Geren. Axe.

Bei der angegebenen Weiſe aus dem Würfelkantengeripp eine Reihe zunehmend ſtumpfer Rautenflache zu bilden, ſieht man, wie wir (wie bei ähnlicher Bildung der Reihe ſpitzer Rautenflache), die Kanten ſich gleich bleiben, die Randgeren wachſen in dem Maaße als die Polgeren abnehmen, die Hauptaxe nimmt ab, in dem Maaße als die Randaxen wachſen. — Wir bemerken:

1. Polgere und Kante. Wenn beim ſtumpfen Rautenflach, das dem Würfel am nächſten ſteht, die Kante kleiner als die Polgere iſt, muß dann nicht in der Reihe immer ſtumpfer werdender Rautenflache, deren Kante ſich gleich bleibt, die Polgere aber kürzer und kürzer wird, ein Rautenflach ſeyn, deſſen Kante gleich der Polgere? Nein, die Polgere auch des möglichſt ſtumpfen Rautenflachs muß um ein Geringſtes länger ſeyn als die Kante. Sie wäre der Kante gleich, wenn der größere Rautenwinkel auf 120° ſtiege, was, wie wir ſahen, unmöglich iſt. Dann zerlegte die Polgere die Raute in 2 gleichſeitige Dreiecke, 2 Seiten jedes Dreiecks würden von 2 Kanten, die Dritte durch die Polgere ſelbſt gebildet. —

2. Polgere. Randgere. Wenn beim ſtumpfen Rautenflach, welches dem Würfel zunächſt ſteht, die Polgere nur um ein Geringſtes kürzer iſt als die Randgere, ſo verhält ſich beim möglichſt ſtumpfen Rautenflach die Polgere zur Randgere nicht völlig wie die Seite eines gleich-

ſeitigen Dreiecks zur doppelten Höhe deſſelben Dreiecks [57]). Dies folgt aus dem Vorhergehenden. Bei einer Raute von 120° und 60° welche, wie wir wiſſen, auch vom ſtumpfſten Rautenflach nicht erreicht wird, würde dies Verhältniß vollkommen ſeyn.

3. Hauptaxe. Randaxe.

Beim ſtumpfen Rautenflach, welches dem Würfel zunächſt ſteht, iſt die Hauptaxe nur um ein Geringſtes kleiner als die Randaxe.

Beim möglichſt ſtumpfen Rautenflach wird die Hauptaxe faſt 0. — Bilde ein △ aus einer Randaxe, einer Polgere und einer Polkante, welche in derſelben Polecke zuſammenſtoßen. Der Winkel des Dreiecks, der in die Polecke fällt, darf nicht 180° ſeyn, weil dann Polkante und Polgere in eine Linie — in die Randaxe fallen, dieſer gleich ſein würden. Die Randaxe des möglichſt ſtumpfen Rautenflachs darf daher nicht völlig ſo lang ſeyn als eine Polkante und Polgere zuſammen genommen. Da nun die Polkante nicht völlig ſo groß als die Polgere ſeyn kann, ſo darf die Randaxe noch weniger die völlige Länge 2er Polgeren haben [58]).

4. Randgere. Hauptaxe.

Beim ſtumpfen Rautenflach das dem Würfel am nächſten, iſt die Randgere kürzer als die Axe. Bei ſtum-

57) Die Polgere iſt zu kurz, die Randgere zu lang für dieſes Verhältniß.

58) Auch nicht die Länge 2er Polkanten wie ich weiter unten zeigen werde. Vergleiche das über die mögliche Länge der Hauptaxe des ſpitzeſten Rautenflachs im vorigen §. Geſagte.

pferen und ſtumpferen Rautenflachen nimmt die Axe bis nahe o ab, die Randgere wächſt dagegen. Es muß daher in dieſer Reihe zunehmend ſtumpfer Rautenflache eins der Art ſeyn, daß ſeine Randgere = der Axe. Stumpft man eine Polecke dieſes Rautenflachs durch die 3 Grundrandgeren ab, ſo muß die Höhe der abgeſtumpften Pyramide ⅓ ihrer Grundkante ſeyn, wie wir ſehen werden. —

5. Polgere. Axe.

Die (Haupt) Axe wird beim möglichſt ſtumpfen Rautenflach faſt o, die Polgere iſt dagegen bei demſelben Rautenflach größer als die Kante. Die Hauptaxe nimmt daher bei dem ſtumpfen Werden der Rautenflache weit ſchneller ab als die Polgere. Wenn dieſe beim ſtumpfen Rautenflach, das dem Würfel zunächſt ſteht, kürzer als die Axe iſt, ſo wird ſich in der Reihe zunehmend ſtumpfer Rautenflache eins finden, deſſen Polgere = der Axe. Bilde ein △ aus der Axe dieſes Rautenflachs, einer obern Polgere, und einer an dieſe gränzenden untern Polkante. Es iſt gleichſchenklig. Polgere und Axe bilden mit der Polkante gleiche Winkel.

6. Kante. Axe.

Nimmt die Axe des Rautenflachs mehr und zwar ſo weit ab, daß ſie der Kante gleich wird, ſo läßt ſich ein gleichſchenkliges △ bilden, deſſen Grundlinie eine untere Polgere, deſſen Schenkel die Axe und eine obere Polkante, welche mit jener Polgere in einer Randecke zuſam-

mentrifft. Polkante und Axe bilden mit der Polgere gleiche Winkel [59].

* * *

Wenn der Würfel als das eine Aeußerſte der Reihe ſtumpfer Rautenflache betrachtet werden kann, ſo ſteht am entgegengeſetzten Ende eine regelmäßige 6 ſeitige Tafel ohne Dicke als unmögliches letztes Glied. Die Hauptaxe des Rautenflachs wäre 0, 3 obere und 3 untere Randecken kämen in eine Ebene zu liegen. Die Polecke wäre Mittelpunkt eines regelmäßigen Sechsecks. Die Polgeren wären den Polkanten gleich, jede gleich einer Linie aus dem Mittelpunkt des Sechsecks nach einem Winkel. 2 ſolche Linien in einer Richtung, deren eine eine Polgere, die andere eine Polkante vorſtellte, (eine Sechsecksgere) entſpräche einer Randaxe. Der Polkantenwinkel betrüge 180°, der Polwinkel 120°. [60]).

§. 40b.

Vergleichung der 2 entgegengeſetzten Reihen der Rautenflache.

Vergleichen wir nun die äußerſten Größen der Flächenwinkel, welche wir in der Reihe ſpitzer Rautenflache fanden, mit den äußerſten Größen der Kantenwinkel in der Reihe ſtumpfer Rautenflache, und umgekehrt.

59) So iſts beim Granatrautenflach, wie wir weiter unten ſehen werden.

60) Wie höchſt ſpitze Rautenflache zweideutig zwiſchen Säule und Rautenflach ſchwanken, ſo finden ſich höchſt ſtumpfe Rautenflache (beim Kalkſpath z. B.) an welchen man kaum die ſich heraushebenden Polecken und Polkanten unterſcheidet.

	I.			
	A. Stumpfer.		B. Spitzer.	
	a. Größter.	b. Kleinſter.	a. Größter	b. Kleinſter.
1. Spitzes Rautenflach. Flächenwinkel. 2. Stumpf. Rautenflach. Kantenwinkel.	$< 180^{\circ}$	$> 90^{\circ}$	$< 90^{\circ}$	$> 0^{\circ}$
	II.			
1. Spitzes Rautenflach. Kantenwinkel. 2. Stumpf. Rautenflach. Flächenwinkel.	$< 120^{\circ}$	$> 90^{\circ}$	$< 90^{\circ}$	$> 60^{\circ}$

Es ergiebt ſich aus I.

Der möglich größte und möglich kleinſte ſtumpfe Flächenwinkel in der Reihe ſpitzer Rautenflache, iſt gleich dem möglich größten und möglich kleinſten ſtumpfen Kantenwinkel, in der Reihe ſtumpfer Rautenflache. ($< 180^{\circ}$ $> 90^{\circ}$).

Daher iſt der möglich größte und möglich kleinſte ſpitze Flächenwinkel in der Reihe ſpitzer Rautenflache gleich dem möglich größten und möglich kleinſten ſpitzen Kantenwinkel in der Reihe ſtumpfer Rautenflache ($< 90^{\circ}$, $> 0^{\circ}$) denn die ſpitzen Winkel erfüllen jene ſtumpfe zu 180°. —

Es ergiebt ſich aus II.

Der möglich größte und möglich kleinſte ſtumpfe Kantenwinkel in der Reihe ſpitzer Rautenflache, iſt gleich dem möglich größten und möglich kleinſten ſtumpfen Flächenwinkel in der Reihe ſtumpfer Rautenflache. ($< 120^{\circ}$, $> 90^{\circ}$).

Daher iſt der möglich größte und möglich kleinſte ſpitze Kantenwinkel in der Reihe ſpitzer Rautenflache = dem möglich größten und möglich kleinſten ſpitzen Flächenwinkel in der Reihe ſtumpfer Rautenflache. ($< 90°$, $> 60°$) denn letztern Winkel erfüllen erſtere zu 180°. —

§. 41.

Winkeltauſch.

Ich ſtelle die Aeußerſten der Flächen- und Kantenwinkel in den beiden entgegengeſetzten Reihen der Rautenflache noch einmal auf andere Weiſe zuſammen [61]. Der Würfel ſteht in der Mitte.

	1. Kantenwinkel.			2. Flächenwinkel.	
St. Rautenfl.	$< 180°$	$> 90°$	—	$< 120°$	$> 90°$
Würfel.			90°		
Sp. Rautenfl.	$< 120°$	$> 90°$	—	$< 180°$	$> 90°$

Die ſtumpfen Kantenwinkel des ſtumpfen Rautenflachs haben alſo eine Fortſchreitung

von 90° bis 180° alſo 90° } zu durchlaufen.
die ſtumpfen Flächenwinkel von 90° bis 120° alſo 30° }

61) Zur Vereinfachung laſſe ich die ſpitzen Winkel weg, da ſie als Erfüuungen jedes ſtumpfen Winkels zu 180°. bekannt ſind.

Dagegen haben die ſtumpfen Kantenwinkel des ſpitzen Rautenflachs

	von 90° bis 120° alſo 30°	zu durchlaufen.
die ſtumpfen Flächenwinkel	von 90° bis 180° alſo 90°	

Hieraus folgt:

1. Die ſtumpfen Kantenwinkel der ſtumpfen Rautenflachsreihe wachſen in einer raſchere Fortſchreitung als die ſtumpfen Flächenwinkel, und zwar im Ganzen in dem Verhältniſſe von 90 : 30 oder von 3 : 1. Denn die erſteren haben 90° zu durchlaufen — von 90° zu 180° — während die zweiten nur 30° durchlaufen — von 90° bis 120°. Es muß daher in jedem ſtumpfen Rautenflach der ſtumpfe Kantenwinkel größer ſeyn als der ſtumpfe Flächenwinkel. Wenn beim Würfel, Flächen- und Kantenwinkel einander gleich ſind, jeder 90°, ſo beträgt beim ſtumpfen Rautenflach des Kalkſpaths, welches Hauy das gleichaxige nennt [62] nennt, der Flächenwinkel 114°, der Kantenwinkel 134°, letzterer alſo 20° mehr als erſterer. Je näher das Rautenflach dem Würfel ſteht, um ſo geringer iſt der Unterſchied der Größe zwiſchen dem ſtumpfen Flächen- und dem ſtumpfen Kantenwinkel, je entfernter es vom Würfel oder je ſtumpfer es iſt, um ſo größer iſt er. So beträgt z. B. beim ſogenannten primitiven Rautenflach des Kalkſpaths der ſtumpfe Rautenwinkel ungefähr 102°, der ſtumpfe Kan-

62) Ich gebe hier und in der Folge die im Hauy'ſchen Traité aufgeführten Winkelbeſtimmungen. Die bekannten ſpätern abweichenden Angaben will ich nicht berückſichtigen, da ja nicht vom Rautenflach des Kalkſpaths ſondern vom Rautenflach überhaupt die Rede iſt.

tenwinkel 105°, der Unterſchied beider iſt daher nur 3°, da er bei dem vorigen weit ſtumpferen Rautenflach 20° betrug.

2. Die ſtumpfen Flächenwinkel wachſen in der Reihe ſpitzer Rautenflache in einem raſcher fortſchreitenden Verhältniß, als die ſtumpfen Kantenwinkel, und zwar im Ganzen ebenfalls im Verhältniß von 90:30 oder von 3:1. Denn die erſtern haben 90° zu durchlaufen — von 90° bis 180° — während die zweiten nur 30° durchlaufen — von 90° bis 120°. Wenn daher beim Würfel der Flächenwinkel gleich dem Kantenwinkel (90°), ſo beträgt bei einem ſpitzen Rautenflache des Kalkſpaths (welches Hauy contraſtirend nennt) der ſtumpfe Flächenwinkel 134° der ſtumpfe Kantenwinkel 114°. Der Flächenwinkel iſt alſo um 20° größer als der Kantenwinkel. Je näher das ſpitze Rautenflach dem Würfel ſteht, um ſo geringer iſt der Unterſchied zwiſchen dem ſtumpfen Flächen- und dem ſtumpfen Kantenwinkel, je entfernter um ſo größer. So iſt z. B. in dem, von Hauy winkelvertauſchend genannten Rautenflache, das weit weniger ſpitz iſt, als das eben erwähnte contraſtirende, der ſtumpfe Flächenwinkel ungefähr 105°, der ſtumpfe Kantenwinkel 102°. Der Unterſchied beider Winkel beträgt alſo nur 3° während er beim contraſtirenden Rautenflach 20° betrug.

3. Wir fanden, daß das Verhältniß, in welchem die ſtumpfen Kantenwinkel der ſtumpfen Rautenflachsreihe wachſen, dem ganz gleich ſey, in welchem die ſtumpfen Flächenwinkel der ſpitzen Rautenflachsreihe zunehmen, dagegen das Ver-

hältniß: in welchem die stumpfen Flächenwinkel der stumpfen Rautenflachsreihe zunehmen, dem ganz gleich sey, in welchem die stumpfen Kantenwinkel der spitzen Rautenflachsreihe wachsen. Hieraus folgt: daß das Verhältniß, in welchem die stumpfen Kantenwinkel der stumpfen Rautenflachsreihe rascher wachsen als die stumpfen Flächenwinkel, derselben Reihe gleich sey dem Verhältnisse, in welchem die stumpfen Flächenwinkel der spitzen Rautenflachreihe rascher wachsen als die stumpfen Kantenwinkel derselben Reihe.

Wenn daher bei einem stumpfen Rautenflach
der stumpfe Flächenwinkel 114°
der stumpfe Kantenwinkel 134° ist, so muß bei einem spitzen Rautenflache, dessen stumpfer Kantenwinkel 114°, der stumpfe Flächenwinkel 134° seyn. — Oder wäre bei einem spitzen Rautenflach der stumpfe Kantenwinkel 102°, der stumpfe Flächenwinkel 105°, so muß bei einem stumpfen Rautenflach, dessen stumpfer Kantenwinkel 105°, der stumpfe Flächenwinkel 102° seyn.

Die eben erwähnten 2 stumpfen und 2 spitzen Rautenflache, welche hinsichtlich ihrer Kanten- und Flächenwinkel im angegebenen umgekehrten Verhältnisse stehn, fand Hauy beim Kalkspath.

Nach dem Gesagten ergiebt es sich aber, daß der Reihe unzähliger stumpfer Rautenflache die zwischen dem Würfel und dem denkbar stumpfsten Rautenflache inne liegt, eine Reihe unzähliger spitzer Rautenfla-

che zwiſchen dem Würfel und dem denkbar ſpitzeſten Rautenflache entſpreche.

Je ein Glied der erſten Reihe ſteht zu einem Gliede der zweiten in dem Verhältniß des Winkeltauſches, ſo daß, wenn die Größen der Kantenwinkel des ſtumpfen Rautenflachs gleich ſind den Größen der Flächenwinkel des ſpitzen, die Größen der Kantenwinkel des ſpitzen Rautenflachs auch gleich ſeyn müſſen den Größen der Flächenwinkel des ſtumpfen Rautenflachs.

Ich werde weiterhin auf dieſe Reihen zurückkommen, nachdem ich einige andere Betrachtungen eingeſchaltet habe.

§. 42.

Die Polkante bildet einen größern Winkel mit der Axe des Rautenflachs, als die Polgere.

Fig. 63 Fig. 63. Ein △ gebildet aus der Axe, der obern Polgere und der untern mit dieſer Gere in derſelben Randecke zuſammentreffenden Polkante. Wir fanden, daß die Polgere ab immer, ſelbſt beim ſtumpfſten Rautenflach, größer ſeyn müſſe, als die Polkante ac. Es muß daher der Winkel s, welcher der Polgere — der größeren Seite ab — gegenüber liegt, größer ſeyn, als der Winkel, welcher der Polkante — der kleinern Seite ac — gegenüber liegt. Was zu beweiſen war.

§. 43.

Theilung der Axe eines Rautenflachs. Anderweitige Größenbeſtimmungen.

Wir fanden, daß die Abſtumpfung einer Würfelecke durch ihre Grundgeren $\frac{1}{3}$ von der Würfelaxe abſchnitt, die Abſtumpfung zweier Ecken derſelben Axe dieſe Axe dreitheilte. Iſt es beim Rautenflach hinſichtlich der Hauptaxe eben ſo?

Fig. 64. Hauptdurchſchnitt eines Rautenflachs. Man ſtumpfe die Polecken durch das obere und untere Rand△ ab. db und ae ſind dann Höhenlinien der beiden Randdreiecke, und ſchneiden die Axe cf unter rechtem Winkel. Die Punkte b und e hälften 2 Seiten der Randdreiecke, d. i. 2 Randgeren, mithin hälften ſie auch die Polgeren ac und fd. Fig. 64

1. △ cbg ≅ △ hef. cb = fe und 2 Winkel. Alſo
   cg = hf, he = bg.
2. △ cbg ∾ △ cha. Gleiche Winkel. Daher.
   hc : gc = ac : bc = 1 : $\frac{1}{2}$.

   Alſo gc = gh. Da aber gc = hf, ſo iſt
   gc = gh = hf.

Durch die Abſtumpfung der Polecken durch ein oberes und ein unteres Randdreieck, wird die Hauptaxe alſo in 3 gleiche Theile — wie beim Würfel — getheilt.

Oder auch 2 Linien, deren jede aus einer Randecke des Rautenflachs rechtwinklig durch die Axe auf die Mitte der gegenüber liegenden Polgere gezogen werden, dreitheilen die Axe.

3. Aus Vergleichung der ähnlichen Dreiecke cbg und cha folgt zugleich:

ah : bg = ac : bc = 1 : $\frac{1}{2}$.

Da aber bg = he, ſo iſt

ah : he = 1 : $\frac{1}{2}$.

D. i. die Hauptaxe cf theilt die Linie ae ſo, daß $\frac{2}{3}$ derſelben nach der Randecke a, $\frac{1}{3}$ nach der Mitte e der Polgere fd zu liegt. Dies ergiebt ſich ſchon daraus, daß die Axe fh der durch ihre 3 Grundrandgeren abgeſtumpf-ten Poleck- (f) Pyramide, den Mittelpunkt h ihres Randdreiecks trifft.

4. Fälle aus b die Linie bi ſenkrecht auf ae.

△ abi ∾ △ ach. Daher

ai : ah = ab : ac = $\frac{1}{2}$: 1. Alſo iſt

ai = ih = he.

D. i. die Linie ae wird durch die Hauptaxe und durch eine Linie, die man # der Hauptaxe aus der Mitte einer Polgere ſenkrecht auf ſie fällt, in 3 gleiche Theile getheilt.

5. Verlängere bi bis ſie die Kante af in k trifft.

△ aik ∾ △ ahf. Alſo

ak : af = ai : ah = $\frac{1}{2}$: 1. Alſo ak = kf.

D. i. eine Linie aus der Mitte b einer obern Pol-gere der Hauptaxe # auf eine untere Polkante gefällt, hälftet dieſe Kante.

6. △ acf ∾ △ abk. Alſo

bk : cf = ab : ac = ak : af = $\frac{1}{2}$: 1. Alſo

bk = $\frac{1}{2}$ cf.

D. i. die eben beſchriebene Linie bk iſt $\frac{1}{2}$ der Haupt-axe.

7. Mache dl $=$ le $= \frac{1}{4}$ fd. Ziehe lm ſenkrecht auf die Axe cf.

$\triangle$ lmf $\backsim$ $\triangle$ ehf. Alſo

mh : hf $=$ le : ef $= \frac{1}{2} : 1$.

Da hf $= \frac{2}{6}$ cf ſo iſt mh $= \frac{1}{6}$ cf, aber

mf $= \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$ cf $= \frac{1}{2}$ cf.

Theilt man alſo eine Polgere in 4 Theile, und fällt von dem Viertheilspunkt, der einer Randecke zunächſt liegt, eine ſenkrechte Linie auf die Hauptaxe, ſo wird dieſe durch eine ſolche Linie gehälftet. Verlängert trifft dieſe Linie den ähnlich gelegenen Viertheilspunkt der gleichlaufenden Gere.

8. Die Hauptaxe wird ferner gehälftet durch Linien, welche die Mitten 2 #er Polgeren und 2 #er Polkanten verbinden, (durch Flächen- und Kantenaxen) dann durch Randaxen. Dies iſt leicht zu erweiſen.

9. Iſt der Winkel ach $= 45^\circ$, ſo iſt auch der Winkel cah $= 45^\circ$ und ch $=$ ah d. i. $\frac{2}{3}$ cf $= \frac{2}{3}$ ae, alſo cf $=$ ae, die Hauptaxe $=$ der Linie von einer Randecke durch die Hauptaxe rechtwinklig zum Mittelpunkt der gegenüber liegenden Fläche. — (So beim primitiven Rautenflach des Kalkſpaths).

Fig. 65. Hauptdurchſchnitt des Rautenflachs wie Fig. 6[5]
Fig. 64. Hälfte die Polkanten cd und af in b und e. Ziehe eine Linie ab aus einer untern Randecke a nach der Mitte b der gegenüber liegenden obern Polkante; ziehe de aus einer obern Randecke d nach der Mitte e der untern Polkante.

$\triangle$ agf $\backsim$ $\triangle$ cgb. Gleiche Winkel.

gf : gc = ag : gb = cb : af = 1 : ½ u. ſ. w., nach Aehnlichkeit der Beweiſe Fig. 64.

Die Linien ab, ed, 3theilen die Axe, und jede wird durch die Axe in ⅔ die nach der Ecke, ⅓ das nach der Kante zugelegen, eingetheilt.

Fig. 66 Fig. 66. 3theile 2 #e Kanten cd in p, q, af in o, n; ziehe op, nq, ſo 3theile dieſe Linien die Axe cf.

3theile 2 #e Geren ac in i, k, fd in l, m; ziehe kl, im, ſo 3theilen dieſe Linien ebenfalls die Axe. Der Beweis iſt leicht.

Daß die Hauptaxe gehälftet wird durch eine Rand-, Flächen- und Kantenaxe iſt bemerkt worden.

Fig. 67 Fig. 67. Hauptdurchſchnitt wie Fig. 64.

Ziehe lc aus dem Viertheilspunkt einer untern Polgere fd nach einer obern Polecke c. lm ſenkrecht auf cf gezogen hälftet cf wie wir ſahen.

$\triangle$ clm $\cong$ $\triangle$ lmf.

cm = mf

lm = lm

$\alpha = \beta$

Alſo cl, die bezeichnete Linie = lf = ¾ der Polgere df.

Aus dieſen Betrachtungen ergiebt ſich die Art den Hauptdurchſchnitt eines Rautenflachs zu verzeichnen.

Fg. 67b Fig. 67b. Ziehe ab. 3theile es in c und d. Ziehe Linien rechtwinklig durch d und c. Mache dk = lc = 2de = 2pc. Ziehe bl, la, ak, kb, ſo iſt lbka Durchſchnitt eines Rautenflachs. Eben ſo iſt der Hauptdurchſchnitt ambi verzeichnet, ſo daß di = 2df ꝛc.

Will

Will man den Durchſchnitt des primitiven Kalkrautenflachs verzeichnen, ſo mache man de = db. Beim Durchſchnitt des winkelvertauſchenden Rautenflachs ſey di = bd. —

Es ſey Axe und Kante eines Rautenflachs gegeben, darnach ſoll der Hauptdurchſchnitt verzeichnet werden. Ziehe (Fig. 67b) die gegebene Axe ab, 3theile ſie in d und c. Ziehe wiederum die Linien ek und lp rechtwinklig durch d und c. Faſſe die gegebene Kante in den Zirkel, ſetze dieſen auf die obere Polecke und kreuze etwa den links gelegenen Theil der obern Queerlinie. Z. B. in i. Auf dieſen Kreuzpunkt fällt die obere Randecke. Verfahre eben ſo von der untern Polecke aus, jedoch mit dem rechts gelegenen Theile der untern Queerlinie, ſo erhälſt du den untern Randeckpunkt l. Verbinde Pol- und Randeckpunkte, ſo haſt du den verlangten Durchſchnitt (ambi)[63]. Fg. 67b

Es iſt leicht die Anwendung auf den Fall zu machen, daß die Axe und die Polgere eines Rautenflachs gegeben wären.

Umgeſtaltungen des Rautenflachs.

§. 44.

A. Abſtumpfung und 3flächige Zuſpitzung.

Ich halte ein Rautenflach zwiſchen einer ſenkrechten Axe. Nun beginne ich mit Abſtumpfung einer obern

63) Bemerke daß Fig. 67b bi = $\frac{1}{2}$ bl. Vergleiche cl (Fig. 67) die $\frac{3}{4}$ dk. Beide Durchſchnitte ſeyen gleich groß, ſo iſt bi = $\frac{2}{3}$ cl.

Polecke, gehe über zur Abſtumpfung einer obern Polkante, weiter zur Abſtumpfung der dieſe Polkante begränzenden obern Randecke und von hier über die untere angränzende Fläche zur untern Polecke. Beſtimmen wir die Folge dieſer Abſtumpfungen genauer.

1. Abſtumpfung der obern Polecke.

2. Abſtumpfung der obern Polkante mit größerer Neigung gegen die Axe, als die Polkante ſelbſt hat. 3 ſolcher Abſtumpfungsflächen bilden eine 3flächige Zuſpitzung der Polecke, die Zuſpitzungsflächen auf die Polkanten aufgeſetzt.

3. Regelmäßige Abſtumpfung der Polkante, da die Abſtumpfungsfläche dieſelbe Neigung gegen die Axe hat, als die abgeſtumpfte Kante.

4. Abſtumpfung der Polkante mit größerer Neigung nach der Randecke, geringerer nach der Polecke als die Polkante ſelbſt hat. Dies kann auch als Abſtumpfung der obern Randecke mit Neigung nach der obern Polecke betrachtet werden.

5. Abſtumpfung der obern Randecke, die Abſtumpfungsfläche weder nach der obern, noch nach der untern Polecke geneigt.

6. Abſtumpfung der obern Randecke mit Neigung nach der untern Polecke.

Mit Uebergehung einer Abſtumpfung welche # der untern an die Randecke gränzenden Fläche, folgt nun:

7. Abſtumpfung der untern Polecke, welche nicht im rechten Winkel die Axe ſchneidet, ſondern mit ihr einen

kleinern Winkel macht. Je 3 ſolcher Abſtumpfungsflächen bilden eine 3flächige Zuſpitzung der untern Polecke, die Zuſpitzungsflächen auf die Seitenflächen aufgeſetzt.

Zuletzt folgt die Abſtumpfung der untern Polecke rechtwinklig durch die Axe, welche der Abſtumpfung der obern Polecke gleich. Mithin ſchließt ſich hier dieſe Kreisreihe der Abſtumpfungen.

8. Für ſich ſteht die Abſtumpfung der Randkanten.

§. 45.

Körper, welche aus den angegebenen Abſtumpfungen entſpringen.

I. 2 Abſtumpfungsflächen der Polecken rechtwinklig durch die Axe. Je 3 und 3 Abſtumpfungskanten fallen entweder §. 44. 1

a. zwiſchen das obere Rand△ und die obere Polecke und zwiſchen das untere Rand△ und die untere Polecke. Der Körper hat 6 5ecke und 2 gleichſeitige Dreiecke — die Abſtumpfungsflächen.

b. Sie fallen in 3 und 3 Randgeren, oder in ein oberes und ein unteres Rand△. Dann ſchneiden ſie, wie wir ſahen, von der Axe an jedem Ende $\frac{1}{3}$ ab. Die Abſtumpfungsflächen ſind gleichſeitige △e, die Ueberbleibſel der 6 urſprünglichen Flächen ſind ſtumpfe oder ſpitze gleichſchenklige △e. Es entſteht daher ein dem 8flach ähnelnder Körper. Nur aus

13*

dem ſpitzen Rautenflach, deſſen Flächenwinkel 60° und 120°, entſteht ein regelmäßiges 8flach.

Die Flächenaxe des dem 8flach ähnelnden Körpers wie das 8flach ſelbſt iſt $\frac{1}{3}$ der Axe des Rautenflachs.

c. Die 2 Abſtumpfungsflächen durchſchneiden die Randkanten oder fallen zwiſchen das obere und das untere Rand △. So entſteht ein 8flach ähnelnder Körper mit 2 #en größeren 6ſeitigen Flächen — den Abſtumpfungsflächen. Die Ueberbleibſel der 6 Flächen des Rautenflachs ſind unregelmäßige Vierecke [64]).

* * *

§. 44. 1 und 5. II. Werden die 2 Abſtumpfungsflächen der Polecken, verbunden mit den 6 Abſtumpfungsflächen der Randecken, die weder nach der untern noch nach der obern Polecke geneigt, mithin der Axe # ſind, ſo entſteht, wenn die Flächen des Rautenflachs ſchwinden, eine regelmäßige 6ſeitige Säule.

Dieſe Abſtumpfung der Randecken, aus welcher die Seitenfläche der Säule entſpringt, ſchneidet einen gleichen Theil von der obern Polkante und der untern Polgere ab. Der Schnitt würde z. B. von einer untern Randgere — welche die untere Polgere hälftet — nach der Mitte der obern Polkante gehn.

Vergleiche Fig. 64. bk iſt die der Axe cf #e Höhenlinie des auf angegebene Weiſe geſchnittenen Dreiecks

64) Es iſt dies Werners 6ſeitige Tafel mit abwechſelnd ſchief angeſetzten Endflächen.

— der Säulenfläche. — Schnitte, welche $\frac{1}{2}$ der Polgeren und Polkanten wegnehmen, berühren ſich in der Mitte der Randkanten.

III. Eine zweite regelmäßige 6ſeitige Säule entſpringt aus der Verbindung der 2 regelmäßigen Abſtumpfungsflächen der Polecken und der 6 Abſtumpfungsflächen der Randkanten. §. 44. 1 und 8.

Zuſatz.

Neigung der Polgeren und Polkanten gegen die ſenkrechte, der Axe #e Seitenfläche oder Seitenkante der Säule, und gegen die waagrechte, die Axe rechtwinklig ſchneidende, Endfläche derſelben.

1. Die Summe der 2 äußern an der Hypotenuſe liegenden Winkel eines rechtwinkligen △s iſt = 3 Rechten oder 270°.

Fig. 67c. Fg. 67c

$$d = a + c$$
$$e = a + b$$
$$e + d = 2a + c + b$$

= 2 Rechten + 1 Rechten = 3 Rechten.

2. Es iſt eine Säule mit rechtwinklig angeſetzten Endflächen gegeben. Stumpft man ihre Endkanten ab, ſo ſind 3 Fälle möglich.

A. man ſchneidet bei der Abſtumpfung eine gleichſchenklige Säule ab — deren rechtwinkliger Durchſchnitt durch die Seitenkanten ein gleichſchenkliges rechtwinkliges △ iſt.

Fig. 67d. Dann bildet die, Fig. 67d durch ed vorgeſtellte Abſtumpfungsfläche gleiche Winkel mit der Fg. 67d

Endfläche und der Seitenfläche der abgeſtumpften Säule, jeder iſt 135°. —

B. Oder man ſchneidet eine ungleichſchenklige Säule ab, und zwar entweder

Fig. 68 Fig. 68. a. ſo, daß der längere Schenkel (Fig. 68) be in die Seitenfläche der abgeſtumpften Säule fällt. Dann bildet die Abſtumpfungsfläche ed mit jener Seitenfläche einen Winkel bei e der größer als 135°, mit der Endfläche einen Winkel bei d der kleiner als 135°. Der erſtere Winkel muß kleiner als 180°, der letztere größer als 90° ſeyn.

Fig. 69 Fig. 69. b. ſo, daß (Fig. 69) der längere Schenkel bd der Abſtumpfungsſäule in die Endfläche der abgeſtumpften fällt. Dann ſind die Winkelgrößen, wie die Figur 69 zeigt, umgekehrt wie im vorigen Falle. In beiden Fällen iſt der Winkel, den die Abſtumpfungsfläche mit der Seitenfläche macht, mehr dem Winkel den ſie mit der Endfläche bildet 270°.

Fig. 70 Fig. 70. 3. Die Axe eines Rautenflachs (Fig. 70) ab iſt # der Seitenfläche oder Seitenkante cd einer Säule. Daher iſt der Winkel bac den die Axe mit der Polgere oder Polkante bildet, mehr dem Winkel acd, den dieſelbe Gere oder Kante mit der Säulenfläche (oder Kante) bildet, = 180°.

Hat man, wie öfters den Winkel acd, ſo findet man den Axenwinkel bac, indem man erſtern Winkel von 180° abzieht.

Fig. 71. 4. a. Die Fläche (oder Polgere) des pri- Fig. 71
mitiven Rautenflachs vom Kalkſpath (Fig. 71) ce, neigt ſich unter gleichen Winkeln gegen die Endfläche fg und gegen die Seitenfläche fd einer 6ſeitigen Säule, d. i. unter Winkeln von 135°. Der Winkel, den die Polgere mit der Axe bildet, cab, iſt alſo 180° — 135° = 45°.

b. Die Polgere der Rautenflache, welche ſpitzer ſind als das primitive des Kalkſpaths, bilden daher mit der Seitenfläche einer Säule Winkel, die größer als 135°, mit der Endfläche Winkel die in eben dem Maaße kleiner als 135°, mit der Axe Winkel, die kleiner als 45°. Z. B. die Polgere des von Hauy ſogenannten winkelvertauſchenden Rautenflachs bildet (Fig. 72) mit der Fig. 72
Säulenendfläche fg einen Winkel von 117°, mit der Säulenſeitenfläche alſo einen Winkel von 270° — 117° = 153°, mit der Axe alſo einen Winkel von 180° — 153° = 27°.

Die Polgere des möglichſt ſpitzen Rautenflachs würde (nach Fig. 68) mit der Endfläche der Säule einen Winkel ceg von nahe 90°, mit der Säulenſeitenfläche einen Winkel ecd von nahe 180° bilden, in welchem Fall der Winkel mit der Axe, cab, faſt 0 ſeyn müßte.

c. Mit den Polgeren der Rautenflache, welche **ſtumpfer** ſind als das primitive Rautenflach des Kalkſpaths, verhält es ſich umgekehrt als bei den ſpitzern. Zum Beiſpiele diene das von Hauy ſogenannte gleichaxige Rautenflach. Fig. 73. Seine Polgere ca bildet mit der Fig. 73
Seitenfläche der Säule einen Winkel dce von 117°, mit der Endfläche daher einen Winkel ceg von 270° — 117° = 153° mit der Axe aber einen Winkel cab = 180° —

$117^\circ = 63^\circ$. Die Polgere des möglichſt ſtumpfen Rautenflachs würde (nach Fig. 69) mit der Endfläche einen Winkel ceg von faſt 180°, mit der Seitenfläche einen Winkel dca von wenig über 90°, mit der Axe einen Winkel cab von faſt 90° bilden.

Es ſteht, nach dem Geſagten, das primitive Rautenflach des Kalkſpaths in der Mitte zweier einander entgegengeſetzten Reihen von Rautenflachen, da ſeine Flächen gleiche Winkel mit der waagrechten Endfläche und der ſenkrechten Seitenfläche einer Säule bilden [65]).

5. Daß die Polkante eines Rautenflachs mit der Endfläche einer Säule einen ſtumpferen, mit der Seitenfläche oder Seitenkante einen minder ſtumpfen Winkel bildet als die Polgere, ergiebt ſich aus früher aufgeſtellten Sätzen von ſelbſt. Auch dies, daß wenn nur einer der 3 Winkel gegeben iſt, den die Polgere (oder Polkante)

a) mit der Seitenfläche } der Säule
b) mit der Endfläche }
c) mit der Axe des Rautenflachs bildet, die 2 übrigen leicht berechnet werden können.

Nehmen wir Fig. 73. Es ſey gegeben

1. $c = 117^\circ$. Dann iſt

$e = 270^\circ - 117^\circ = 153^\circ$

$a = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$.

2. $e = 153^\circ$. Dann iſt

$c = 270^\circ - 153^\circ = 117^\circ$

$a = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$.

65) Wir werden ſehen, daß das winkelvertauſchende Rautenflach des Kalkſpaths hinſichtlich der Polkanten eben ſo in der Mitte zweier entgegengeſetzten Reihen der Rautenflache ſteht.

3. $a = 63^\circ$. Dann iſt

$c = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$

$e = 270^\circ - 117^\circ = 153^\circ$.

Ende des Zuſatzes.

Zwiſchen der Abſtumpfung der Polecken und der der Randecken, da die Abſtumpfungsfläche weder nach der obern noch nach der untern Polecke geneigt iſt, liegen nun die 3 Arten von Abſtumpfungen der Polkanten inne, welche §. 44 unter 2, 3, 4 aufgeführt worden ſind.

IV. Zuerſt eine Reihe von Abſtumpfungen der §. 44. 2
Polkanten, welche ſtärker gegen die Axe geneigt ſind, als die Polkanten ſelbſt. 3 ſolcher Abſtumpfungen an der obern, 3 an der untern Polecke, können, wie wir erwähnten, als 3flächige Zuſpitzungen dieſer beiden Ecken betrachtet werden, die Zuſpitzungsflächen auf die Polkanten aufgeſetzt. Alle Rautenflache, welche hieraus entſtehen, ſind ſtumpfer als das zugeſpitzte Rautenflach. Denn ſie ſind augenſcheinlich ſtumpfer als das (folgende) Rautenflach, welches aus regelmäßiger Abſtumpfung der Polkanten entſteht, und dieſes ſelbſt iſt, wie wir gleich ſehen werden, ſtumpfer als das veränderte Rautenflach. Ich will hier nur eine ſolche Zuſpitzungsweiſe der Polecken aufführen, deren Weſen ich jedoch erſt weiter unten beleuchten werde. Fig. 73b ſtelle das von Hauy Fg. 73b
ſogenannte contraſtirende Rautenflach des Kalkſpaths vor. Theile die obern Polkanten ab, bc durch n und o in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, und ſchneide von der obern Randecke g nach n und o. Führe 5 ähnliche Schnitte, ſo erhälſt du die Anfänge der Flächen des gleichaxigen Rautenflachs

§. 44. 3 V. Eine regelmäßige Abſtumpfung der Polkanten. 3 Abſtumpfungsflächen der obern, 3 der untern Polkanten bilden, wenn zuletzt die Flächen des abgeſtumpften Rautenflachs ſchwinden, ein neues ſtumpferes Rautenflach. Denn die Polgeren des neuen Rautenflachs haben dieſelbe Neigung gegen die Axe wie die abgeſtumpften Polkanten des erſten Rautenflachs, alſo eine größere als deſſen Polgeren.

Fig. 74 Fig. 74. Die Schnitte ſind auf dem abzuſtumpfenden Rautenflach ſo zu verzeichnen. Fig. 74 abcdefg ein ſpitzes Rautenflach. 3theile deſſen Randkanten. Theile deſſen Polkanten und Polgeren, ſo daß $\frac{2}{3}$ (wie bi, bu nach den Pol- $\frac{1}{3}$ (wie ic, ud) nach den Randecken fällt.

hopi iſt Verzeichnung des Schnittes, welcher die Kante bg abſtumpft. Eine 4te Linie fällt auf die Hinterſeite.

nmq ſchneidet de, klr aber fe weg. 2 Verzeichnungslinien jeder dieſer beiden Abſtumpfungsflächen ſind nicht zu ſehen.

Die Randecken des eingeſchriebenen Rautenflachs fallen in die Punkte u, s, t. Linien, welche u und s, s und t verbinden, entſprechen den Randkanten, eine Linie ut der Randgere des eingeſchriebenen Rautenflachs.

1. $\triangle$ fbd $\sim$ $\triangle$ tbu.

$$tu : fd = bu : bd = \frac{2}{3} : \frac{3}{3}.$$

Die Randgere des eingeſchriebenen Rautenflachs iſt $\frac{2}{3}$ der Randgere des umſchriebenen.

Fig. 75 Fig. 75. 2. Fig. 75 efgh ſtellt den Hauptdurchſchnitt des Rautenflachs Fig. 74 dar, in welchen der

Hauptdurchſchnitt iklm des eingeſchriebenen durch Abſtumpfung der Polkanten entſtandenen Rautenflachs verzeichnet iſt.

$\triangle$ gfh $\sim$ $\triangle$ ikh

ik : gf = ih : gh = $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{3}$.

Die Polgere des eingeſchriebenen Rautenflachs iſt $\frac{2}{3}$ der Polkante des umſchriebenen.

Es verhält ſich alſo die Polgere des eingeſchriebenen Rautenflachs zur Polkante des umſchriebenen, wie die Randgere des eingeſchriebenen Rautenflachs zur Randgere des umſchriebenen.

3. $\triangle$ gfh $\sim$ $\triangle$ ikh

$\triangle$ hfe $\sim$ $\triangle$ lmf

Hieraus ergiebt ſich daß fk, mh = $\frac{1}{3}$ fh.

Daher fk = km = mh, und km = $\frac{1}{3}$ fh. D. i. die Axe des eingeſchriebenen Rautenflachs iſt $\frac{1}{3}$ der Axe des umſchriebenen.

4. $\triangle$ gkh $\sim$ $\triangle$ iqh.

iq : gk = hi : hg = $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{3}$. Da nun

iq = $\frac{2}{3}$ gk

iq = $\frac{2}{3}$ is ſo iſt

gk = ir. D. i.

die Höhe des Randdreiecks des eingeſchriebenen Rautenflachs iſt $\frac{2}{3}$ der Höhe des Randdreiecks des umſchriebenen. Dies folgte ſchon aus dem Verhältniß der Randgeren. —

Hauy führt beim Kalkſpath 4 Rautenflache auf, welche in folgendem Verhältniß ſtehn:

Stumpfe die Polkanten des ſpitzeſten — des contraſtirenden — ab, ſo erhälſt du das minder ſpitze winkelvertauſchende, ſtumpfe die Polkanten des winkelvertauſchenden ab, ſo erhälſt du das ſtumpfe primitive, ſtumpfe endlich die Polkanten des primitiven ab, ſo erhälſt du das gleichaxige Rautenflach.

Die Verwandtſchaft dieſer 4 Rautenflache entſpricht mithin ganz derjenigen, welche wir ſo eben betrachtet haben.

Fig. 76 Fig. 76 ſtellt die Hauptdurchſchnitte jener 4. Rautenflache dar.

1. on = $\frac{2}{3}$ kl
ik = $\frac{2}{3}$ gf
fe = $\frac{2}{3}$ bc. D. i.

die Polgere jedes eingeſchriebenen Rautenflachs der Reihe iſt $\frac{2}{3}$ der Polkante des ihm umſchriebenen.

2. Iſt die Axe des contraſtirenden Rautenflachs bd = 27 ſo iſt
die Axe des winkelvertauſch. fh = 9
— — primitiven km = 3
— — gleichaxigen oq = 1

3. Iſt die Randgere des contraſtirenden Rautenflachs = 1 oder 27 ſo iſt
die Randgere des winkelvertauſch. = $\frac{2}{3}$ . . 18
— — primitiven — = $\frac{4}{9}$ . . 12
— — gleichaxigen — = $\frac{8}{27}$ . . 8.

Fig. 77 Fig. 77. Es ſey abc ein gleichſeitiges Rand△ des contraſtirenden Rautenflachs, ſeine Seite bc =

der Randgere dieſes Rautenflachs, ſo iſt bk Randgere des winkelvertauſchenden, bi des primitiven, bh des gleichaxigen Rautenflachs. Die entſprechenden Höhen der 4 Randdreiecke ſind bd, be, bf, bg. Wie die Figur entworfen ſey und welches ihre Verhältniſſe, bedarf keiner Auseinanderſetzung.

VI. Eine Reihe Abſtumpfungen der obern Randecke mit Neigung nach der obern Polecke, der untern Randecke mit Neigung nach der untern Polecke. Dieſe Reihe fällt zwiſchen die eben abgehandelte regelmäßige Abſtumpfung der Polkanten, und die regelmäßige der Axe ≠ e Abſtumpfung der Randecke. §. 44. 4

A. Aus dieſer Reihe Abſtumpfungen hebe ich die folgende zuerſt aus, weil ſie der vorigen regelmäßigen Abſtumpfung der Polkanten gerade entgegengeſetzt iſt.

Fig. 78. Spitzes Rautenflach. Von der untern Randgere ke ſchneide durch die Polgeren bk und be die obere Randecke f ab. Durch ähnliche Schnitte die 2 andern obern Randecken l und g. Fig. 78

Von einer obern Randgere fg aus, ſchneide durch 2 an dieſe Randgere gränzende untere Polgeren fh — die 2te iſt auf der Figur nicht ſichtbar. — So ſtumpfe die untere Randecke e, ſo die 2 andern untern Randecken ab.

Aus ſolcher Abſtumpfung der Randecken entſteht ein Rantenflach, deſſen Polkanten bm, bn, ho in die Polgeren (bk, be, fh) des umſchriebenen fallen, das alſo ſpitzer iſt als das umſchriebene. Die Axe bh bleibt unverkürzt, die Randecken fallen in die Flächenmitten n, m, daher in die Ebene des Randdreiecks fg.

1. $bm = \frac{1}{2} bk$.

Die Polkante des eingeſchriebenen Rautenflachs iſt $\frac{1}{2}$ der Polgere des umſchriebenen.

2. Linien von m nach o, von n nach o ſtellen Randkanten vor. Jede ſolche Linie iſt gleichfalls $\frac{1}{2}$ der Polgere des umſchriebenen Rautenflachs. Ein Schnitt durch 4 gehälftete #e Kanten bl, kf, he — die 4te iſt nicht zu ſehn — entblößt eine Raute, die = und # bfeg. mo iſt eine Linie zwiſchen den Mitten 2 benachbarter Seiten dieſer Raute # der langen Gere, daher $\frac{1}{2}$ dieſer Gere — oder der Polgere be.

3. Eine Linie mn würde eine Randgere des eingeſchriebenen Rautenflachs darſtellen.

$$\triangle kbe \sim \triangle mbn$$

$$he : mn = bk : bm = 1 : \tfrac{1}{2}.$$

Die Randgere des eingeſchriebenen Rautenflachs iſt $\frac{1}{2}$ der Randgere des umſchriebenen, daher das Randreieck des eingeſchriebenen Rautenflachs $\frac{1}{4}$ des Randdreiecks des umſchriebenen Rautenflachs iſt.

Fig. 79 Fig. 79. 4. Fig. 79 Hauptdurchſchnitt lbhe des Rautenflachs Fig. 78, und des ihm umſchriebenen Rautenflachs qbnh. qn = qn.

Die Flächenaxe des umſchriebenen Rautenflachs iſt = der Randaxe des eingeſchriebenen. Da nun die Flächenaxe eines Rautenflachs = einer # 4 Kanten, ſo iſt auch die Randaxe des eingeſchriebenen Rautenflachs = einer und # 4 Kanten des umſchriebenen. —

Da die Randgere oder die Seite des Randdreiecks des umſchriebenen Rautenflachs doppelt ſo groß als die

Randdreiecksſeite des eingeſchriebenen, ſo verhalten ſich die Höhenlinien beider Randdreiecke eben ſo. nl = 2no. Daß np = 2op iſt bekannt.

Betrachten wir jetzt die 4 von Hauy aufgeſtellten Rautenflache des Kalkſpaths noch einmal.

Stumpfe die Randecken des stumpfſten, des gleichaxigen Rautenflachs auf die eben angegebene Weiſe ab, ſo entſteht das minder ſtumpfe primitive, ſtumpfe gleichmäßig die Randecken des primitiven ab, ſo erhälſt du das ſpitze winkelvertauſchende, ſtumpfe endlich gleichmäßig die Randecken des winkelvertauſchenden ab, ſo entſteht das noch ſpitzere contraſtirende.

Fig. 80. abcd Hauptdurchſchnitt des gleichaxigen Rautenflachs. Ihm iſt das primitive ecfd, dieſem das winkelvertauſchende gbhd, dieſem das contraſtirende ibkd eingeſchrieben. Fig. 80

1. Die **Hauptaxe** bd aller 4 Rautenflache iſt dieſelbe. Es fallen daher je 3 obere und je 3 untere Randdreiecke der 4 Rautenflache, da ſie dieſelbe Axe 3theilen, auch in dieſelben 2 Ebenen.

2. Die **Kante** bf des primitiven iſt $\frac{1}{2}$ der **Polgere** des gleichaxigen, die Kante bg des winkelvertauſchenden iſt $\frac{1}{2}$ der Polgere des primitiven, die Kante bk des contraſtirenden, iſt $\frac{1}{2}$ der Polgere des winkelvertauſchenden.

3. Die Randaxe ki des contraſtirenden Rautenflachs iſt eins mit der Flächenaxe der winkelvertauſchenden, daher = und # deſſen Kanten gb, dh; die Randaxe gh des winkelvertauſchenden Rautenflachs $\underline{\#}$ den Kanten bf und ed des primitiven; die Randaxe fe des primitiven

Rautenflachs iſt $\underset{=}{\#}$ den Kanten dc und ab des gleichaxigen.

Es ergiebt ſich auch, daß die Randaxe ik des contraſtirenden Rautenflachs ½ der Polgere eb des primitiven, der ſie auch #. Eben ſo iſt die Randaxe gh, des winkelvertauſchenden Rautenflachs ½ der Polgere bc des gleichaxigen, und # dieſer Gere.

Die Randaxe jedes Rautenflachs dieſer Reihe macht alſo mit der Axe denſelben Winkel wie die Polkante des ihm unmittelbar umſchriebenen ſtumpfern Rautenflachs, und wie die Polgere des dieſem wieder umſchriebenen noch ſtumpferen Rautenflachs.

Fig. 81 Fig. 81. 4. Es ſey abc Randdreieck des gleichaxigen Rautenflachs, ſo iſt def Randdreieck des primitiven, ghi, des winkelvertauſchenden, klm, des contraſtirenden. Es ſey die Seite des Rand△s oder

die Randgere ab des gleichaxigen Rautenflachs = 8 ſo iſt
— — ef — primitiven — — — = 4
— — gh — winkelvertauſchend. — = 2
— km — contraſtirenden — — = 1

Daß ſich die Höhen der 4 Randdreiecke eben ſo verhalten wie die Seiten, zeigte ſchon die Eintheilung der Linie af Fig 80, da af : gf : gk : nk = 24 : 12 : 6 : 3 = 8 : 4 : 2 : 1.

Es ſei

das Randdreieck des contraſtirenden Rautenfl. = 1 ſo iſt
— — winkelvertauſchend. — = 4
— — primitiven — — = 16
— — gleichaxigen — — = 64

Ich

Ich werde weiter unten das Verhältniß gegenwärtiger Folge der 4 Rautenflache zu den von No. V. näher beleuchten.

VI. B. Fig. 80. Verlängere dk bis s. △ bic ∾ △ src. Zu §. 44. 4

bs : bc = ir : ic = 3 : 18.

Hiernach iſt bc eingetheilt. Es ergiebt ſich, daß wenn man die obere Polgere des gleichaxigen Rautenflachs in 6 Theile theilt, und eine Linie von $\frac{1}{5}$ Punkt (s), welcher der obern Polecke (b) zunächſt liegt, nach der untern Polecke (d) zieht, dieſe Linie dieſelbe Neigung gegen die Axe hat, wie die Polgere des contraſtirenden Rautenflachs.

Durch den Punkt s ziehe eine Linie # der Randgere und ſchneide von dieſer nach der Polecke d. Führe 5 ähnliche Schnitte, ſo entſteht das contraſtirende Rautenflach, welches mit dem gleichaxigen dieſelbe Axe hat. Die Schnitte gehören in die Abtheilung: Abſtumpfung der obern Randecke mit Neigung nach der obern Polecke.

VI. C. Die regelmäßige Abſtumpfung der Polkanten §. 44. 4 erzeugt ein Rautenflach das ſtumpfer, die unter A betrachtete Abſtumpfung der Randecken, eins das ſpitzer iſt als das verwandelte. Zwiſchen beiden muß daher eine Abſtumpfung der Randecken inne liegen, deren Flächen dieſelbe Neigung gegen die Axe haben, wie die Flächen des verwandelten Rautenflachs.

Fig. 82. Rautenflach. Hälfte die Randkanten Fig. 82 in i. a. c. d und verbinde die Hälftpunkte durch die Linien

ia, ac, cd. Schneide von ac nach der Polecke b durch die Linien ab, bc; eben ſo von ia nach h, von cd nach h ꝛc. Aus 12 dergleichen Schnitten entſteht eine regelmäßige 6ſeitige Doppelpyramide.

Beweis. af = fc = ce = ed ꝛc. als Hälften gleicher Randkanten. Die Rautenwinkel bei f, e ꝛc. ſind gleich, daher △ afc ≌ △ ced u. ſ. w. Alſo ac = cd = ia ꝛc. Die △e afb, bfc, bgd ꝛc. ſind gleich und ähnlich. (2 S. 1 W.) Daher ab = bc = bd. Daher △ abc ≌ △ cbd. (3 S.) So beweißt man, daß die 12 △e, welche durch die angegebenen Schnitte gebildet werden, gleich und ähnlich ſind.

Aus dem Beweiſe ergiebt ſich, daß die △e gleichſchenklig ſind, da wir die Linien ab, bc, bd ꝛc. gleich fanden.

Jeder Polwinkel der 6 obern und 6 untern △e muß kleiner als 60° ſeyn, weil ſie zuſammen ſonſt $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ groß wären und in eine Ebene fielen. Die △e ſind mithin ſpitze gleichſchenklige und die Grundkanten immer kürzer als die Polkanten.

Fig. 83 Fig. 83. Die 6ſeitige Doppelpyramide. Alle Winkel, welche die gleichen Polkanten mit der Axe bilden, ſind gleich. aeb ein gleichſchenkliges △ = △ adb ꝛc. Daher der Winkel eab = eba = dab = dba ꝛc. Alle Winkel, welche die gleichen Höhenlinien der gleichen △e mit der Axe bilden, ſind gleich. agb ein gleichſchenkliges △, daher Winkel gab = gba.

Es bilden demnach die 6 Abſtumpfungsflächen denſelben Winkel mit der Axe, wie die Flächen des abge=

ſtumpften Rautenflachs. Schneidet man daher # den Abſtumpfungsflächen fort, ſo führt dies zuletzt auf ein Rautenflach, welches dem urſprünglichen ähnlich.

Da jede Polkante wie ae Hypotenuſe eines rechtwinkligen △s age (Fig. 83) die Höhenlinie ag aber eine Kathete deſſelben △s, ſo iſt die Höhenlinie kürzer als die Polkante.

Fig. 84. Auf die Axe ab errichte das gleichſchenklige △ agb aus Höhenlinen und aeb aus den längern Polkanten. Es bilden 2 zuſammentreffende Polkanten an der Randecke e einen ſpitzern Winkel aeb, als 2 in der Mitte g einer Grundkante zuſammenſtoßende Höhenlinien — als der Winkel agb. Dagegen iſt der Winkel eba, den die Polkante mit der Axe bildet, größer als der Winkel gba, der Höhenlinie mit der Axe. Fig. 84

Da jede Höhenlinie ſenkrecht auf der Mitte der Grundkante ſteht, ſo iſt (Fig. 83) agb der Winkel der Grundkante de. Die 6 Paar ähnlich gelegenen Höhenlinien, ſchließen demnach 6 gleiche Grundkantenwinkel ein. —

Je 4 in einer Ebene liegende Höhenlinien bilden ein gleichſeitiges 4eck (Parallelogramm). Da 2 überzwerch einander gegenüber liegende Winkel dieſes 4ecks, als Grundkantenwinkel gleich ſind, ſo ſind auch die 2 andern — an den Polecken — unter ſich gleich, weil jeder einen dergleichen Grundkantenwinkel zu 2 Rechten ergänzt. Demnach ſind die 6 Winkel, welche 3 Paar an der obern,

3 Paar an der untern Polecke einander gegenüber liegende Flächen der 6ſeitigen Doppelpyramide bilden, einander gleich. — Dies folgt ſchon aus dem Obigen, da jeder = 2en Winkeln, welche einander in der Polecke gegenüber liegende 2 Höhenlinien mit der Axe bilden.

Was von 4 in einer Ebene liegenden Höhenlinien geſagt iſt, gilt auch für 4 in einer Ebene liegende (gleiche) Polkanten.

Die gemeinſchaftliche Grundfläche der 6ſeitigen Doppelpyramide iſt ein regelmäßiges 6eck. Daß es gleichſeitig, ſahen wir. Es iſt aber auch gleichwinklig.

Man vergleiche 6 △e, deren jedes von der obern halben Axe, einer obern Polkante und einer Linie gebildet wird, die von dem Punkt, in welchem die Axe die gemeinſame Grundfläche berührt, nach der Grundecke gezogen wird, in welchem die Polkante endet. Dieſe 6 △e ſind gleich und ähnlich (2 S. 2 W.) Daher ſind ihre waagrechten Katheten — die Linien auf der Grundfläche von 6 Grundecken nach der (Axen) Mitte gezogen — gleich. Deshalb ſind auch die 6 Dreiecke gleich und ähnlich, welche jene 6 Linien mit den 6 Grundkanten bilden (3 S.), alſo auch ihre 6 Winkel, welche um den Axenmittelpunkt in der Grundfläche liegen. Jeder dieſer Winkel iſt daher $\frac{360}{6} = 60^{\circ}$, daher ſind die 6 △e gleichwinklig.

Jeder Winkel der 6ſeitigen gemeinſchaftlichen Grundfläche iſt nun = 2en Winkeln 2er benachbarter ſolcher △e, mithin $= 2 \times 60 = 120^{\circ}$. Das Grund-6eck der 6ſeitigen Doppelpyramide iſt daher gleichſeitig und gleichwinklig — regelmäßig.

Fig. 85. 6ſeitige Doppelpyramide. Fälle fh, dh ſenkrecht auf ae; di, fi ſenkrecht auf eb, ſo iſt der Winkel dhf Winkel der Kante ae, dif Winkel der Kante be. Fig. 85

Die △e dhe, dif, fie, die ſind ≌. (1 S. 2 W.) Es ſind alſo die 24 △e gleich, welche an den 6 Grundecken auf ſolche Weiſe verzeichnet werden. Daher ſind die Seiten dh, hf, fi, id ꝛc. gleich.

Die Linien ce, fd ꝛc. ſind gleich als Seiten gleichſeitiger Dreiecke, welche in das regelmäßige 6eck der Grundfläche beſchrieben werden.

Es iſt demnach das △ dhf ≌ △ dif ≌ allen ähnlich gebildeten △en. (3 S.) In dieſen △en iſt der Winkel dhf = dif ꝛc. da ſie ähnlichen Seiten gegenüber liegen. D. i. der Winkel der Polkante ae = dem der Polkante eb ꝛc.

Es ſind demnach alle Polkantenwinkel der 6ſeitigen Doppelpyramide gleich [66]).

* * *

Betrachten wir nun die Aeußerſten einer Reihe regelmäßiger 6ſeitiger Doppelpyramiden, von der möglichſt ſpitzen zur möglichſt ſtumpfen.

1. Flächenwinkel.

Der ſpitze △swinkel von faſt 0° bis nahe 60°. Die Summe der 6 Polwinkel daher von faſt 0° bis nahe 360°. Die 2 gleichen Winkel an der Grundkante von faſt 90° bis

66) Wir ziehen den allgemeinen Schluß: ſind die Polkanten einer 6ſeitigen (einfachen oder doppelten) Pyramide gleich lang, ſo iſt die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck, und alle Polkantenwinkel ſind gleich groß.

nahe 60°. Die Winkel um eine Grundecke fallen zwiſchen 360° und 240°.

2. Kantenwinkel.

Die Grundkantenwinkel von nahe 180° bis nahe 0. In der Mitte ſteht der Winkel von 90°. — Er findet ſich bei der 6ſeitigen Doppelpyramide, die aus Abſtumpfung der Randecken des primitiven Kalkrautenflachs entſteht. Der Durchſchnitt durch 4 in einer Ebene liegende Höhenlinien iſt hier ein Geviert. — Der Polkantenwinkel von nahe 120° bis nahe 180°. Der Polkantenwinkel der ſpitzeſten Pyramide iſt größer als der Winkel der regelmäßigen 6ſeitigen Säule, die als das Ende der ſpitzen 6ſeitigen Pyramiden mit abgeſtumpfter Polecke betrachtet werden kann [67]). Die Summe der Polkantenwinkel ſchwankt daher zwiſchen etwas mehr als 6 × 120 = 720° und etwas weniger als 6 × 180 = 1080°, zwiſchen der Winkelſumme eines 6ecks und der eines 8ecks.

* * *

§. 44. 6 VII. Wir übergehen die regelmäßige Abſtumpfung der Randecke, da ſie ſchon in Verbindung mit der Abſtumpfung der Polecken abgehandelt iſt. Es folgt nun die Abſtumpfung der obern Randecke mit Neigung nach der untern Polecke. 3 ſolcher Abſtumpfungen, verbunden mit der entſprechenden Abſtumpfung der 3 untern Randecken mit Neigung nach der obern Polecke, geben ein Rautenflach, das ſpitzer als das verwandelte.

67) Vergleiche den Beweis Fig. 62 und wende ihn hier an.

Zwiſchen letzterem und der unendlich ſpitzen 6ſeitigen Säule liegt eine Reihe ſolcher Rautenflache inne. Iſt ein Rautenflach mit regelmäßig abgeſtumpften Randecken, d. i. mit 6 Säulenflächen, gegeben, ſo bildet man aus dieſem gegenwärtige Reihe der Rautenflache durch Abſtumpfung der Kanten, welche zwiſchen den Flächen des Rautenflachs und den Säulenflächen liegen [68]). Dieſe Abſtumpfung kann entweder regelmäßig ſeyn, ſo daß die Abſtumpfungsfläche gleiche Winkel mit der Fläche des Rautenflachs und der Säulenfläche macht, oder ſie kann mehr nach der erſtern oder mehr nach der letztern geneigt ſeyn. Als Beiſpiel diene folgendes. Fig. 80 ebfd Hauptdurchſchnitt des primitiven, ibkd, Hauptdurchſchnitt des contraſtirenden Rautenflachs. Verlängere deſſen Polgere dk bis s. Dieſer Punkt theilt die Polkante bf in ⅓ das nach der Pol; ⅔ die nach der Randecke zu liegen. Stumpfe des primitiven Rautenflachs obere Randecke f von s nach d ab, alſo mit Neigung nach der untern Polecke, ſo entſteht das contraſtirende. — Auf ähnliche Weiſe ſchneide das winkelvertauſchende Rautenflach aus dem gleichartigen (Fig. 80. ax : ab = ag : ak = 12 : 18 = 2 : 3. Schneide nun in der Richtung von xd).

* * *

VIII. Mit Uebergehung der Abſtumpfung, welche der untern Fläche des Rautenflachs #, ſchreite ich zur 3flächigen Zuſpitzung der untern, und zur entſpre- §. 44. 7

68) Hauy. Man füge z. B. die Flächen des winkelvertauſchenden Rautenflachs (Tafel 23. Fig. 3) der Fig. 18. Tafel 24 zu.

chenden 3flächigen Zuſpitzung der obern Polecke fort. Die Zuſpitzungsflächen ſind auf die Flächen aufgeſetzt. Hierdurch läßt ſich eine Reihe von Rautenflachen erzeugen, unter denen das mindeſt ſtumpfe, ſtumpfer als das zugeſpitzte Rautenflach, das möglichſt ſtumpfe aber faſt mit den Abſtumpfungsflächen der Polecken zuſammenfällt. Aus dieſer Reihe will ich 2 Glieder betrachten. —

1. Ein Rautenflach dem ähnlich, welches aus regelmäßiger Abſtumpfung der Polkanten entſteht.

Fig. 86 Fig. 86. Hauptdurchſchnitt eines Rautenflachs. Vergleiche Fig. 64. $fe = \frac{1}{2}\,ce$. Verlängere ſe nach a, ſo daß $fa = fe$, daher $ae = ec$. Ziehe ab.

$\triangle\, abe \cong \triangle\, cbe$. 2 S. 1 W.

Alſo $ab = bc$ der Polkante, und der Winkel abe gleich dem Winkel cbe den die Polkante mit der Axe bildet.

Aus f (dem Hälftpunkte der Polgere bi) ziehe $fh \parallel ab$.

$\triangle\, aeb \sim \triangle\, fed$.

$be : de = ae : fe = 2 : 1$.

Da nun $be = \frac{1}{3}\,bg$, ſo iſt $bd = \frac{1}{6}\,bg$ der Axe.

$\triangle\, abc \sim \triangle\, fhc$

$bh : hc = af : fc = \frac{1}{4} : \frac{3}{4}$.

Der Winkel $fde = abe = cbe$.

Es wird alſo ein Schnitt, der von der obern Randgere (deren Mittelpunkt f) aus, $\frac{1}{3}$ der Axe das nach der obern Polecke gelegen, abſchnitte, und zugleich bh, $\frac{1}{4}$ der gegenüber liegenden obern Polkante, und 5 dieſem

ähnliche Schnitte, die Anfänge eines Rautenflachs erzeugen, deſſen Polgeren (fd) mit der Axe bg denſelben Winkel bilden, wie die Polkante bc, welches alſo dem ähnlich, das aus regelmäßiger Abſtumpfung der Polkanten entſteht. Beide einander ähnliche Rautenflache würden vereint eine regelmäßige 6ſeitige Doppelpyramide hervorbringen.

Fig. 87. Fig. 86 mit Weglaſſung von ba, ac. Fig. 87
Aus der untern Randecke i ziehe nach e, dem Hälftpunkte der Polkante, bc. (Vergleiche Fig. 65) ie ‡ fh.

△ irg ∾ △ bre. 3 W.

Der Winkel c = b = a = d. Daher ir = ig.

Zieht man alſo eine Linie von einer untern Randecke nach der Mitte der obern gegenüber liegenden Polkante, ſo macht dieſe Linie denſelben Winkel mit der Axe wie die Polkante, ⅔ der Linie iſt = der Polkante, die ganze Linie 1½ der Kante.

Fig. 88. 2. In den Hauptdurchſchnitt abcd des Fig. 88
gleichaxigen Rautenflachs, iſt der Hauptdurchſchitt edbf des eingeſchriebenen primitiven, in dieſen wiederum hdgb der Hauptdurchſchnitt des dem primitiven eingeſchriebenen winkelvertauſchenden Rautenflachs verzeichnet.

Hälfte die Polgere bh und Polkante bg des letztern Durchſchnitts in k und i, ziehe ki. Dieſe Linie iſt ‡ bf der Kante des primitiven und bc der Polgere des gleichaxigen Rautenflachs, da ſie ‡ gh der Randaxe des winkelvertauſchenden, der Flächenaxe des primitiven Rautenflachs.

bp = ½ bd, bo = op = ¼ bd, wie ſich aus Vergleichung der ähnlichen △e bok und bph ergiebt.

Schneidet man alſo von einer obern Randgere des winkelvertauſchenden Rautenflachs (deren Mitte k) nach dem Hälftpunkte i der gegenüber liegenden obern Polkante, wodurch $\frac{1}{4}$ der Axe bd weggeſchnitten wird, und führt 5 ähnliche Schnitte, ſo erhält man die Anfänge von den 6 Flächen eines Rautenflachs, welches mit dem gleichaxigen übereinſtimmt.

Fg. 89ᵃ Fig. 89ᵃ. In den Hauptdurchſchnitt des winkelvertauſchenden Rautenflachs bgdh iſt der des contraſtirenden bldk eingeſchrieben. Ziehe ki und gh wie Fig. 88.

$\triangle$ gml $\sim$ $\triangle$ bmh (gleiche Winkel)

bm : ml = bh : gl = 2 : 1 oder bm = 2 ml.

$\triangle$ bno $\sim$ $\triangle$ bmp

bn : bm = bo : bp = 1 : 2. Daher

lm = mn = nb oder bl iſt in 3 gleiche Theile getheilt.

Eine Linie kn, von einer obern Randecke des contraſtirenden Rautenflachs, nach dem $\frac{1}{3}$ Punkt n der gegenüber liegenden obern Polgere gezogen, ſchneidet $\frac{1}{4}$ (bo) der Axe bd ab. Sie iſt ⋕ gh der Randaxe des umſchriebenen winkelvertauſchenden Rautenflachs, und macht daher mit der Hauptaxe denſelben Winkel, wie die Polkante des primitiven und die Polgere des gleichaxigen Rautenflachs. (Vergleiche Fig. 73ᵇ.)

Mit der 3flächigen Zuſpitzung der Polecken, welche auf die Flächen aufgeſetzt iſt, ſchließt die Reihe der Abſtumpfungen, welche ich §. 44 aufgeſtellt. Denn die Abſtumpfung der untern Polecke, welche nun folgen würde, gehört mit der zuerſt abgehandelten Abſtumpfung der obern Polecke zuſammen.

§. 46.

Zur Ergánzung, Ausfúhrung und Ueberſicht der beiden vorigen Abſchnitte.

A.

Ueberblicken wir noch einmal die Reihe der aufgeführten Abſtumpfungen des Rautenflachs und die daraus entſpringenden Kórper.

Geſondert ſtehn 3 Arten der Abſtumpfung, die der Polecken, Randecken und Randkanten.

Fig. 89^b. Die erſtere (Durchſchnitt eines ſpitzen Rautenflachs Fig 89^b) mit I bezeichnet, erzeugt fúr ſich dem 8flach áhnelnde Kórper; verbunden mit regelmáßiger Abſtumpfung der Randecken (Fig. 89^b II) oder Randkanten, erzeugt ſie 2 regelmáßige 6ſeitige Sáulen. Fg. 89^b

Jede der úbrigen Arten von Abſtumpfung oder 3flächiger Zuſpitzung, erzeugt 3 und 3 Flächen eines Rautenflachs. Dies iſt entweder ſtumpfer als das urſprúngliche (Fig. 89^b IV. V. VIII.$^{1 \text{ und } 2}$) oder ſpitzer (Fig. VI. 89^b VI.^{A} VII.); oder ihm áhnlich. (Fig. 89 VI.^{E}) Die Abſtumpfung, aus welcher letzeres entſpringt, führt zunáchſt in die regelmáßige 6ſeitige Doppelpyramide.

B.

Jedes Rautenflach iſt zunáchſt mit 2 andern verwandt. Das eine ſtumpfere entſpringt aus Abſtumpfung der Polkanten. Seine Flächen haben dieſelbe Neigung gegen die Axe, wie die Polkanten des Urrautenflachs. Das zweite iſt ſpitzer. Es entſpringt aus der

Fig. 78 dargeſtellten Abſtumpfung der Randecken, ſeine Polkanten haben dieſelbe Neigung gegen die Axe wie die Polgeren des Urrautenflachs.

Um und in jedes Rautenflach läßt ſich das ihm zunächſt verwandte ſtumpfere Rautenflach beſchreiben.
Fig. 90 Eben ſo das ſpitzere. Fig. 90 zeigt dies in dem Wechſelverhältniß des primitiven und winkelvertauſchenden Rautenflachs.

C.

Jedes Rautenflach kann nun als Mittelpunkt

1. 2 entgegengeſetzter Reihen wachſend ſtumpferer Rautenflache betrachtet werden, nämlich:
   a. einer Reihe umſchriebener, welche mit ihm dieſelbe Axe haben. — (Z. B. das contraſtirende Rautenflach ibkh Fig. 80) — und
   b. einer Reihe eingeſchriebener, deren Axen in dem Verhältniß von $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27}$ ꝛc. abnehmen. (Z. B. Fig. 76 das contraſtirende Rautenflach abcd, welches man ſich mit ibkh Fig. 88 als ein und daſſelbe denke.)
2. 2 entgegengeſetzter Reihen wachſend ſpitzerer Rautenflache betrachtet werden.
   a. umſchriebener, deren Axen in dem Verhältniß von $1 : 3 : 9 : 27$ wachſen. (Z. B. das gleichaxige Rautenflach ponq Fig. 76.)
   b. eingeſchriebener, welche mit ihm dieſelbe Axe haben. (Z. B. Fig. 80 das gleichaxige Rautenflach abcd, welches man ſich mit ponq Fig. 76 als ein und daſſelbe denke.)

D.

Wenn in den erwähnten Reihen, die Axenneigung von Polkante und Polgere eines Rautenflachs die Neigung der Polkanten und Polgeren der 2 ihm zunächſt verwandten Rautenflache beſtimmt, ſo beſtimmen andere feſte Linien ſeines Körpers die Neigung der Polkanten und Polgeren entfernterer Glieder ſeiner Verwandtſchaftsreihe. Nehmen wir Fig. 80 das ſtumpfſte gleichaxige Rautenflach abcd. Die mathematiſch beſtimmte Linie eb beſtimmt die Neigung der Polgere des primitiven, der Polkanten des winkelvertauſchenden Rautenflachs; die Linie xd die Neigung der Polgeren des winkelvertauſchenden, der Polkanten des contraſtirenden, endlich die Linie sd die Neigung der Polgeren des contraſtirenden Rautenflachs gegen die Axe.

Nehmen wir entgegengeſetzt das ſpitzeſte Rautenflach, das contraſtirende, ſo finden wir die Neigungen der Polkanten und Polgeren der entfernteren ſtumpferen Rautenflache ſeiner Verwandtſchaftsreihe ebenfalls in beſtimmten Linien gegeben. (Fig. 80) Seine Randaxe ik neigt ſich gegen die Hauptaxe, wie die Polkante des winkelvertauſchenden und wie die Polgere des primitiven Rautenflachs. (Fig. 89ª) Die Linie kn von einer obern Randecke nach dem obern 3theil der gegenüber liegenden obern Polgere hat mit der Polkante des primitiven, der Polgere des gleichaxigen Rautenflachs gleiche Neigung gegen die Axe.

§. 47.

Zum Schluß.

Ich breche hier die Betrachtung des Rautenflachs ab, und deute nur vorläufig den Verfolg an.

Wir haben die Reihe der Abſtumpfungen und 3flächigen Zuſpitzungen der Rautenflache durchgenommen und geſehn, wie jedes Rautenflach auf ſolche Weiſe durch Erzeugung von 3 und 3 Flächen in ein neues Rautenflach verwandelt werden kann

Auf ähnliche Weiſe kann die Reihe der Zuſchärfungen, der Polkanten oder Randecken und die der 6flächigen Zuſpitzungen der Polecken betrachtet werden. Durch dieſe Zuſchärfungen und Zuſpitzungen entſtehn 3 und 3 Paar neue Flächen — 6ſeitige Doppelpyramiden, deren Flächen nur in ſeltenen beſtimmten Fällen gleichſchenklige, gewöhnlich aber ungleichſeitige Dreiecke ſind.

Fig. 91 Fig. 91 ſtellt eine ſolcher 6ſeitigen Doppelpyramiden vor, welche ich, da ſie vornämlich beim Kalkſpath vorkommen, und durch dieſen zuerſt bekannt geworden ſind, Kalkpyramiden nenne. Die Figur zeigt, wie die Polkanten abwechſelnd länger und kürzer ſind. Die kürzern machen einen ſtumpfern Winkel mit der Axe als die längern, der Kantenwinkel der längern iſt ſtumpfer.

Jede Kalkpyramide wird aus verſchiedenen Rautenflachen auf verſchiedene Weiſe erzeugt — iſt mit dieſer verwandt. So z. B. Fig. 91, welche beim Kalkſpath vorkommt, und von Hauy metaſtatiſch genannt worden iſt. Sie iſt mit dem primitiven, winkeltauſchenden,

contraſtirenden und vermiſchten Rautenflach [69]) verwandt. Als Beiſpiel, wie die Reihen der Kalkpyramiden, welche aus gewiſſen Zuſchärfungen des Rautenflachs erzeugt werden können, vollſtändig aufzufaſſen ſind, diene folgendes.

Fig. 92. Ein Rautenflach, deſſen Polkanten regelmäßig zugeſchärft ſind. Die Zuſchärfungskante rr kann einerſeits nur um ein geringſtes ſtumpfer ſeyn als die zugeſchärfte Kante. Dann iſt die Kante rm nahe 180°, die in der Richtung der Polgere ſich bildende Kante x desgleichen. — Im entgegengeſetzten äußerſten Falle iſt die Zuſchärfungskante nahe 180°, d. i. ſie fällt faſt mit Abſtumpfung der Polkante zuſammen. Dann iſt der Winkel der Kante x faſt ſo groß als der Polkantenwinkel des Rautenflachs, das aus Abſtumpfung der Polkanten entſteht. Fig. 92

Es ſey m das contraſtirende Rautenflach, dann wird im letztern Falle der Winkel der Kante x mit dem Polkantenwinkel des winkeltauſchenden Rautenflachs faſt zuſammentreffen. — Eine nähere Betrachtung findet, daß zwiſchen dieſen beiden Aeußerſten, zwiſchen der möglichſt ſpitzen und möglichſt ſtumpfen Zuſchärfung, und den daraus entſtehenden Kalkpyramiden, eine beſtimmte Zu-

69) Hauy. Fig. 6. Tafel 23. Außerdem iſt dieſe Kalkpyramide mit dem ſpitzen Rautenflach Nro. 10 von Bournon verwandt. Auf ähnliche Weiſe iſt die von Hauy paradoxal genannte Kalkpyramide (Fig. 42. 43. 46) mit dem gemiſchten und winkeltauſchenden Rautenflach verwandt und mit Bournons Rautenflach Nro. 10.

ſchärfung liegt, durch welche eine regelmäßige 6ſeitige Doppelpyramide erzeugt wird. —

*　*　*

Nach Betrachtung der Kalkpyramiden werde ich kürzlich zeigen, wie die im Geſchlecht des Rautenflachs herrſchende Geſtaltenwandlung das Geſetz des Ebenmaaßes völlig beſtätigt.

Dann will ich die eigentliche Sippe des Würfels als Sippe eines Rautenflachs betrachten. Der Winkel den die Fläche oder Polkante eines Rautenflachs mit der Axe bildet, muß kleiner als 90°, größer als 0° ſeyn. In der Mitte ſteht der Winkel von 45°, den (nach Hauy's früherer Anſicht) die Fläche des primitiven, die Polkante des winkeltauſchenden Kalkſpaths mit der Axe macht.

Dagegen bildet die Fläche des Würfels mit der Axe einen Winkel von ungefähr 35°, die Kante von ungefähr 55°. So erſcheint der Würfel wegen des erſtern Winkels den ſpitzern, wegen des letztern, den ſtumpfern Rautenflachen angehörig, als wahrhafter Zwitter. —

Dies werde ich näher ausführen, und verweiſe vorläufig auf die beigefügte Tabelle der verſchiedenen Winkelgrößen der 4 Rautenflache des Kalkſpaths und der Rautenflache der Würfelſippe.

Auf-

Aufgaben.

Zu §. 3.
Der Würfel.

1. Wie iſt er zu ſtellen?

2. Welcher Art, und wie viel Flächen, Kanten, Ecken, Geren, Axen hat er?

3. Welche Winkel machen die Geren mit den Kanten?

4. Man ſchneide eine Würfelecke durch ihre 3 Grundgeren ab. Der Schnitt geht rechtwinklig durch die Axe. Der Grundkantenwinkel der abgeſchnittenen 3ſeitigen Pyramide ſey 55°.

Welcher Winkel bildet die Gere } mit der Würfelaxe?
— — — Kante }

Wie vielſter Theil der Axe wird durch die angegebene Abſtumpfung der Ecke weggeſchnitten?

Zu §. 4.
Das 8flach.

1. Wie iſt es zu halten? Beſchreibe es.

2. Welcher Art, und wie viel Flächen, Kanten, Ecken, Axen hat es?

3. Wo liegt die Mitte eines gleichſeitigen △s? d. h. der Punkt, welcher gleich weit von den 3 Winkeln und wiederum gleich weit von den Mitten der 3 Seiten entfernt iſt?

4. Eine Linie, welche 2 △mitten des 8flachs # der Axe verbindet, verhält ſich zur Axe?

5. Eine Linie, welche 2 △mitten des 8flachs rechtwinklig durch die Axe verbindet, verhält ſich zur Kante?

Zu §. 5.

Das Rauten12flach.

1. Wie iſt es zu halten? Beſchreibe es.

2. Welcher Art, und wie viel Flächen, Kanten, Ecken, Geren, Axen hat es?

Zu §. 6.

Der Leuzit.

1. Wie iſt er zu halten? Wie zu beſchreiben?

2. Welcher Art, und wie viel Flächen, Kanten, Geren, Ecken, Axen hat er?

Zu §. 7.

Das 4flach.

1. Wie iſt es zu ſtellen? Beſchreibe es.

2. Welcher Art, und wie viel Flächen, Kanten, Ecken, Axen hat es?

3. Wie verhält ſich eine Linie, welche 2 △mitten des 4flachs verbindet, zur Kante deſſelben?

Zu §. 8.

Würfel und 8flach.

A. Der umſchriebene Würfel.

1. Stelle die Reihe der Modelle vom Würfel ins 8flach. Beſchreibe ſie.

2. Wie verhalten ſich die Axen und Kanten des eingeſchriebenen 8flachs zu beſtimmten Linien des umſchriebenen Würfels?

3. Sind die △e des ſo erhaltenen 8flachs gleichſeitig?

4. Wie viel Grade beträgt der Kantenwinkel des 8flachs — wie viel der Winkel, welchen 2 an derſelben Ecke einander gegenüber liegende △e des 8flachs bilden?

5. Wie verhält ſich die Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs zur (Eck) Axe des umſchriebenen Würfels?

6. Wie verhält ſich die Kantenaxe des eingeſchriebenen 8flachs zur Kantenaxe des umſchriebenen Würfels?

B. Das umſchriebene 8flach.

1. Stelle die Reihe der Modelle vom 8flach in den Würfel. Beſchreibe ſie.

2. Wie verhalten ſich Kante, Gere, Axe des eingeſchriebenen Würfels zu beſtimmten Linien des umſchriebenen 8flachs. Durchſchnittszeichnungen ſind nothwendig.

C. 1. Wie verhalten ſich Kante, Gere, Axe, Geviert, Körper des dem 8flach einaeſchriebenen Würfels, zu denen des umſchriebenen Würfels?

2. Wie verhalten ſich Kante, Axe, Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs zu denen des umſchriebenen 8flachs? —

Zu §. 9.

Würfel und Rauten12flach.

A. Der umſchriebene Würfel.

1. Stelle die Reihe der Modelle vom Würfel ins Rauten12flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Wie verhalten ſich die 4kantigen Axen, die langen Geren des eingeſchriebenen 12flachs zu Linien des umſchriebenen Würfels?

3. Wie iſt die Lage des eingeſchriebenen 12flachs im hohlen umſchriebenen Würfel?

B. Der eingeſchriebene Würfel.

1. Stelle die Reihe der Modelle vom Rauten12flach in den Würfel. Beſchreibe dieſelbe.

2. Wie verhalten ſich die Kanten, Geren, Axen des eingeſchriebenen Würfels zu beſtimmten Linien des umſchriebenen 12flachs? Wie beſonders die lange Gere der 12flachsraute zur Würfelgere?

3. Wie iſt die 12flachsraute nach dem Verhältniß ihrer Geren zu verzeichnen?

4. Welche Körper nehmen die 6 Schnitte beim Uebergange aus dem Rauten12flach in den Würfel weg? Wie verhalten ſich dieſe abgeſchnittenen Körper — ihre Dreiecksböhenlinien, Axen, Grundkantenwinkel, — wie ihr körperlicher Inhalt, beſonders im Vergleich zum eingeſchriebenen Würfel?

5. Wie verhält ſich die kurze Gere des 12flachs zur 4kantigen Axe deſſelben?

6. Wie verhält ſich die Kante des 12flachs zur 3kantigen Axe?

7. Iſt die kurze Gere des Rauten12flachs oder die Kante länger?

8. Iſt die 3kantige Axe länger oder die 4kantige?

9. Welche Winkel bilden 2 einander an einer 4kantigen Ecke gegenüber liegende Kanten des 12flachs — welchen Winkel die Kante mit einer 3kantigen Axe — welche Winkel die Kante mit einer kurzen Gere, mit der ſie an einer 3kantigen Ecke zuſammenſtößt? (Gegeben ſind die Winkel, unter denen ſich je 2 3kantige Axen ſchneiden.)

10. Wie groß ſind die Rautenwinkel des Rauten12flachs?

11. Rechtwinklig durch dieſelbe 3kantige Axe des Rauten12flachs ziehe Linien aus folgenden 4 in derſelben Ebene liegenden Ecken.

1) aus 2 4kantigen auf die gegenüber liegenden Flächen.

2) aus 2 3kantigen, ſenkrecht auf die gegenüber liegenden Kanten.

In welche Theile werden hierdurch die 3kantige Axe; im erſten Falle die 2 Geren, die 2 Kanten im andern Falle getheilt?

12. Aus den 2 ſtumpfen Rautenwinkeln des Rauten12flachs fälle 2 ſenkrechte einander ♯e Linien auf 2 ♯e Kanten. Welche Eigenſchaften haben die ſo erzeugten △e?

13. Schneide eine möglichſt hohe regelmäßige 6ſeitige Säule aus dem Rauten12flach. Wie verhalten ſich ihre Seitenkanten zu den 6 durchſchnittenen Kanten des 12flachs?

14. Hälfte das Rauten12flach durch dieſelben 6 Kanten.

C. 1. Ein Würfel iſt um, einer in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide — Kanten, Geren, Axen, Flächen, Körper — zu einander?

2. Ein Rauten12flach iſt um eins in denſelben Würfel beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Zu §. 10.

8flach und Rauten12flach.

A. Das umſchriebene 8flach.

1. Stelle die Folge der Modelle vom 8flach in das Rauten12flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 8flachs und des eingeſchriebenen 12flachs fallen zuſammen?

3. Wie verhält ſich die Kante, die lange Gere des 12flachs zu Linien des 8flachs?

4. Beim 8flach mit abgeſtumpften Kanten ſind wie viel Kanten und wie viel Gruppen #er Kanten?

5. Welche Kanten bilden bei demſelben Körper rechte Winkel mit Flächen des 8flachs?

B Das eingeſchriebene 8flach.

1. Stelle die Folge der Modelle vom Rauten12flach ins 8flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 12flachs und des eingeſchriebenen 8flachs treffen zuſammen?

3. Wie verhält ſich die kurze Rautengere zur Axe des 8flachs?

4. Wie bildet man das umſchriebene 12flach aus dem eingeſchriebenen 8flach durch Zufügen? Grundkantenwinkel des hinzugefügten Körpers. Seine Axe im Verhältniß zur 3kantigen Axe des 12flachs und zur Flächenaxe des 8flachs.

5. Wie verhält ſich die Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs zur 3kantigen Axe des umſchriebenen 12flachs?

C. 1. Ein 8flach um, eins in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſie ſich zu einander, ihre (Eck) Axen, Flächenaxen ꝛc.?

2. Ein Rauten12flach um, eins in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

D. 1. Wie verhält ſich der Würfel um ein 12flach beſchrieben, zum 8flach in daſſelbe 12flach beſchrieben?

2. Wie verhält ſich das 8flach um ein 12flach beſchrieben zum Würfel in daſſelbe 12flach beſchrieben?

3. Ein Würfel und ein 8flach um daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſie ſich zueinander?

4. Ein Würfel und ein 8flach in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſie ſich zu einander?

Zu §. 11.

Rauten12flach und Leuzit.

A. Das umſchriebene Rauten12flach.

1. Stelle die Folge der Modelle vom Rauten12flach in den Leuzit. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 12flachs und des eingeſchriebenen Leuzits treffen zuſammen?

3. Wie verhält ſich die lange Leuzitgere zur ungleich 4kantigen Axe?

4. Die Linie, welche von einer ungleich 4kantigen Leuzitecke rechtwinklig durch die Hauptaxe zur gegenüber

liegenden ungleichkantigen Ecke führt, welcher Linie entſpricht ſie beim 12flach?

5. Der eingeſchriebene Leuzit iſt gegeben. Beſtimme die 4kantige Axe des umſchriebenen 12flachs.

B. Das eingeſchriebene Rauten12flach.

1. Stelle die Folge der Modelle vom Leuzit in das 12flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Leuzits und des eingeſchriebenen 12flachs treffen zuſammen?

Welche Verhältniſſe des 12flachs ſind daher auf den Leuzit überzutragen? Nämlich:

A. Wie verhält ſich die Hauptleuzitaxe zur Linie, welche 2 ſeiner 3kantigen Ecken rechtwinklig durch eine ungleichkantige und ⫽ der Hauptaxe ſelbſt verbindet?

B. Wie verhält ſich die Linie zwiſchen 2 benachbarten Hauptecken zur Linie von einer 3kantigen Ecke rechtwinklig durch eine Hauptaxe zur gegenüber liegenden 3kantigen Ecke?

C. Wie verhält ſich die kürzere Gere zur 3kantigen Axe?

D. Wie groß iſt der Winkel, den 2 kurze Geren an einer Hauptecke bilden?

3. Wie verwandle ich das eingeſchriebene 12flach durch Hinzuſetzen in den umſchriebenen Leuzit? Wie verhält ſich die Axe des zugeſetzten Körpers zur längeren Leuzitgere und zur ungleich 4kantigen Leuzitaxe; wie verhält ſich dieſe zur Flächenaxe des eingeſchriebenen 12flachs?

4. Wie verhält ſich die Verbindungslinie 2er benachbarter Hauptecken zur ungleich 4kantigen Axe — wie die

Linien zwiſchen 2 3kantigen Ecken rechtwinklig durch die Hauptaxe? Beide ſind derſelben ungleich 4kantigen Axe #.

5. Die 3kantige Leuzitaxe zu 6theilen, nach Aehnlichkeit der Verhältniſſe des 12flachs.

6. Die kürzere Leuzitgere zu 3theilen, und die 2 gleichen Kanten, welche den ſpitzen Trapezwinkel bilden, zu hälften.

7. Eine Raute in das Leuzittrapez zu beſchreiben, deren eine Gere mit der längern Leuzitgere zuſammenfällt, und 2 Seiten mit 2 Leuzitkanten.

8. Beweiſe das es 24 längere, 24 kürzere Leuzitkanten giebt.

C. 1. Ein Rauten12flach um, eins in denſelben Leuzit beſchrieben, wie verhalten ſich beide? Flächenaxen, lange und kurze Geren? —

2. Wie verhält ſich die Linie, welche 2 3kantige Leuzitecken rechtwinklig durch eine ungleich 4kantige Axe verbindet, zu der, die man zwiſchen 2 ungleich 4kantigen Ecken rechtwinklig durch eine Hauptaxe gezogen?

3. Wie verhält ſich letztere Linie zur Hauptaxe?

4. In welche Theile zerfällt eine ſenkrechte Hauptaxe durch 5 Schnitte — 2 durch 4 obere und 4 untere ungleich 4kantige Ecken; 2 durch 4 obere und 4 untere 3kantige Ecken; 1 durch die waagrechte gemeinſchaftliche Grundfläche.

5. Wie verhält ſich die Hauptleuzitaxe zur ungleich 4kantigen Axe in Liniengrößen des eingeſchriebenen 12flachs ausgedruckt? —

6. Ein Leuzit um, einer in daſſelbe Rauten12-flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide? — Zunächſt die ungleich 4kantigen Axen und längeren Geren.

7. Verzeichne ein Leuzittrapez ohne daß dir ſeine Winkelgrößen gegeben ſind.

Zu §. 12.

Würfel und Leuzit.

A. Der umſchriebene Würfel.

1. Stelle die Folge vom umſchriebenen Würfel in den Leuzit. Beſchreibe dieſelbe. Wie verhält ſich dieſe Folge zu der aus dem Würfel ins 8flach?

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Würfels und des eingeſchriebenen Leuzits treffen zuſammen?

3. Schneide die 24 Zuſpitzungsflächen des Würfels am Würfel mit abgeſtumpften Kanten.

4. Wie verhalten ſich die Zuſpitzungsflächen zu den Würfelaxen?

5. Wie ſchneidet man eine vollendete einzelne Zuſpitzungsfläche?

6. Zeichne ein Würfelrechteck und in dieſes 4 vollendete Zuſpitzungsflächen der 4 Ecken.

7. Wie verhält ſich die 3kantige Axe des eingeſchriebenen Leuzits zur Axe des umſchriebenen Würfels — wie zur eigenen kürzern Gere?

8. Welche Winkel bilden 2 einander gegenüber liegende kürzere Geren an einer Hauptecke?

9. Wie verhält ſich die Hauptleuzitaxe zur 3kantigen Axe?

10. Verlängere 2 an der obern, 2 an der untern Hauptleuzitecke zuſammentreffende in einer Ebene liegende

kürzere Geren bis ſie über die 3kantigen Ecken hinaus zuſammentreffen. Welche Figur entſteht? Wie verhält ſich dieſelbe zum umſchriebenen Würfel? Welche Figur würde derſelben beim Rauten12flach entſprechen?

B. Der eingeſchriebene Würfel.

1. Stelle die Folge vom umſchriebenen Leuzit in den eingeſchriebenen Würfel. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Leuzits und des eingeſchriebenen Würfels fallen zuſammen?

3. Wie verhält ſich die Hauptleuzitaxe, wie die Linie zwiſchen 2 benachbarten Hauptecken, wie die kurze Leuzitgere zu beſtimmten Linien des eingeſchriebenen Würfels?

C. 1. Es ſey ein Würfel um, einer in denſelben Leuzit beſchrieben.

Zeichne 2 Würfelrechtecke, eines in, eines um denſelben Leuzitdurchſchnitt — letzteren durch 2 Paar in einer Ebene liegende ♯e kurze Geren, und durch 2 Paar in derſelben Ebene liegende kürzere Kanten — beſchrieben.

1b. Um den wie vielſten Theil der Würfelkantenaxe — oder der Würfelgere — ragt die ungleich 4kantige Leuzitecke über die Kantenaxe des eingeſchriebenen Würfels hinaus?

2. Wie verhalten ſich Kanten, Geren, Axen, Flächen, Körper der beiden Würfel?

3. Wie verhielten ſich 2 Würfel, deren einer in, einer um daſſelbe Rauten12flach beſchrieben war?

4. Um den äußern Würfeldurchſchnitt von C 1 zeichne einen zweiten Leuzitdurchſchnitt, dem unter C 1 angegebenen ähnlich.

Wie verhalten ſich Hauptaxen, 3kantige Axen, kurze Geren, ungleich 4kantige Axen des um und des in denſelben Würfel beſchriebenen Leuzits zu einander?

5. In welche Theile zerfällt die ungleich 4kantige Axe des Leuzits, getheilt durch 2 Kanten des ihm eingeſchriebenen Würfels, durch 2 ungleich 4kantige Eckpunkte des dieſem eingeſchriebenen Leuzits, und 2 Kanten des wiederum dieſem Leuzit eingeſchriebenen Würfels?

6. Wie verhält ſich die Hauptleuzitaxe zur ungleich 4kantigen Leuzitaxe in Linienverhältniſſen des Würfels ausgedrückt?

Zu §. 13.

8flach und Leuzit.

A. Das umſchriebene 8flach.

1. Stelle die Folge aus dem 8flach in den Leuzit. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 8flachs und des eingeſchriebenen Leuzits fallen zuſammen?

3. Wie verhält ſich die Hauptleuzitaxe, wie die Linie, welche 2 3kantige Leuzitecken rechtwinklig durch die Hauptaxe verbindet, wie die zwiſchen 2 benachbarten Hauptleuzitecken, wie die 3kantige Leuzitaxe — zu beſtimmten Linien des dem Leuzit umſchriebenen 8flachs?

4. 8flach mit abgeſtumpften Kanten. Gieb genau die Zuſpitzung der 8flachecken an, aus welchen der Leuzit entſpringt.

5. Welchen Winkel macht eine Zuſpitzungsfläche mit der ihr an der zugeſpitzten Ecke gegenüber liegenden Fläche des 8flachs?

6. Wie verhalten ſich die Zuſpitzungsflächen zu den Flächenaxen des 8flachs in Hinſicht auf Gleichlaufen?

7. Verzeichne den Hauptleuzitdurchſchnitt in den Durchſchnitt eines 8flachs. Verlängere die 4 kurzen Leuzitgeren bis ſie über die Hauptleuzitecke hinaus die gegenüber liegende Höhenlinie des 8flachs treffen. — Ziehe die 8flachkantenaxe und eine Flächenaxe des 8flachs. Verbinde die Flächenmitten des 8flachs durch das Rechteck des eingeſchriebenen Würfels. Gieb die Winkelgrößen in der Figur nach Graden an, wie ſie ſich aus der früheren Betrachtung ergeben.

8. Welche Winkel bilden 2 kurze Leuzitgeren, die einander an einer Hauptleuzitecke gegenüber liegen? (Vergleiche Leuzit und Rauten12flach. Leuzit und Würfel.)

9. Eine vollendete Zuſpitzungsfläche des 8flachs, welchen Theil der ihr an der zugeſpitzten Ecke gegenüber liegenden Höhenlinie ſchneidet ſie ab?

10. 6theile die Axe des 8flachs.

11. 4theile die Hauptaxe des dem 8flach eingeſchriebenen Leuzits.

Wie verhält ſich die 8flachsaxe zur Hauptaxe des eingeſchriebenen Leuzits?

12. Wie verhält ſich die kurze Leuzitgere zur 3kantigen Leuzitaxe? Wie zur Flächenaxe des umſchriebenen 8flachs?

13. Wie vielſter Theil der Kantenaxe des umſchriebenen 8flachs — oder der Kante — iſt die ungleich 4kantige Leuzitaxe?

14. Wie verhält ſich die ungleich 4kantige Leuzitaxe zur Hauptleuzitaxe in Linientheilen des umſchriebenen 8flachs?

15. Stimmt dies Verhältniß mit dem durch Vergleichung des Rauten12flachs und des Leuzits gefundenen?

16. Wie ſtimmt es mit dem durch Vergleichung des Würfels und Leuzits gefundenen? Iſt die ungleich 4kantige Axe oder die Hauptleuzitaxe länger? Anzuwenden auf 2 Linien, welche die Hälften dieſer beiden Axen ſind.

B. Das eingeſchriebene 8flach.

1. Stelle die Reihe der Modelle vom Leuzit in das 8flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Leuzits und des eingeſchriebenen 8flachs fallen zuſammen?

3. Wie verhält ſich die 8flachkante zur Linie des umſchriebenen Leuzits, welche 2 3kantige Ecken rechtwinklig durch eine Hauptaxe verbindet?

4. Wie verhält ſich die 3kantige Leuzitaxe zur Flächenaxe des eingeſchriebenen 8flachs?

C. 1. Es iſt ein 8flach um, eins in denſelben Leuzit beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander? Wie ihre Axen, Kanten, Flächenaxen?

2. Welcher Theil der ungleich 4kantigen Axe geht beim Uebergange aus dem Leuzit in das 8flach verloren? Mit welchen Linien des Rauten12flachs fallen die Kanten des eingeſchriebenen 8flachs zuſammen? —

3. Es iſt ein Leuzit um, einer in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

4. Vergleiche das Verhältniß des um und in den Leuzit beſchriebenen 8flachs mit dem Verhältniß des um und in das Rauten12flach beſchriebenen 8flachs.

Zu §. 14.

1. Wie verhalten ſich Rauten12flach, Würfel und 8flach, welche in denſelben Leuzit beſchrieben ſind, zu einander?

2. Wie verhalten ſich dieſelben um denſelben Leuzit beſchriebenen Körper zu einander?

3. Sind erſtere Verhältniſſe mit letzteren übereinſtimmend? Verhält ſich z. B. der umſchriebene Würfel zum umſchriebenen 8flach, wie der eingeſchriebene zum eingeſchriebenen?

Die Nebenſippe des 4flachs.

Zu §. 15.

4flach und Würfel.

A. Der umſchriebene Würfel.

1. Stelle die Folge aus dem Würfel in das 4flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des eingeſchriebenen 4flachs fallen mit Punkten und Linien des umſchriebenen Würfels zuſammen?

3. Wie groß iſt der Kantenwinkel des 4flachs? Wie groß der Winkel den eine 4flachkante mit der ihr an einer Ecke gegenüber liegenden 4flachshöhenlinie bildet?

4. Fälle aus einer 4flachsecke eine ſenkrechte Linie auf die ihr gegenüber liegende Fläche. Beweiſe, daß ſie die Mitte dieſer Fläche trifft.

5. Verzeichne den Durchſchnitt eines 4flachs durch 2 in einer Ebene liegende Höhenlinien. Verzeichne auch die Axen, und bemerke alle Winkelgrößen.

6. Wie verhält ſich im △ von ungefähr 90, 70, 20° die Hypotenuſe zur Seite die dem Winkel von 20° gegenüber liegt?

7. Der Mittelpunkt des 4flachs iſt um wie viel weiter von ſeinen Ecken als von ſeinen Flächenmitten entfernt? Wie theilt er eine Kantenaxe?

8. Wie verhält ſich $\frac{2}{3}$ der 4flachshöhenlinie : Axe : Kante?

9. Wie verhält ſich die Axe des eingeſchriebenen 4flachs zur Axe des umſchriebenen Würfels?

10. Verwandle das eingeſchriebene 4flach durch Hinzuſetzen in den umſchriebenen Würfel. Wie groß muß die Axe des aufgeſetzten Körpers ſeyn — wie groß der Winkel ſeiner Grundkante?

B. Der eingeſchriebene Würfel.

1. Stelle die Folge aus dem 4flach in den Würfel. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des eingeſchriebenen Würfels fallen mit Punkten und Linien des umſchriebenen 4flachs zuſammen?

3. Wie verhält ſich die Gere des eingeſchriebenen Würfels zur Kante des umſchriebenen 4flachs.

C. 1. Ein Würfel um, einer in daſſelbe 4flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander? Ver-

Verzeichne zuerſt einen 4flachsdurchſchnitt in das Rechteck eines umſchriebenen Würfels, wiederum in den 4flachsdurchſchnitt den Hauptdurchſchnitt des ihm eingeſchriebenen Würfels und bemerke die Winkelgrößen.

Wie verhalten ſich Geren, Kanten, Axen des ein- und des umſchriebenen Würfels? Wie ihre Gevierte und Körper?

2. Hälfte die Axe des 4flachs.

* * *

3. Es iſt ein 4flach um, eins in denſelben Würfel beſchrieben, wie verhalten ſie ſich zu einander? Wie ihre Kanten, Kantenaxen, Axen?

Verzeichne in den Durchſchnitt des eingeſchriebenen Würfels der vorigen Figur den Durchſchnitt eines ihm eingeſchriebenen 4flachs.

Zu §. 16.

4flach und 8flach.

A. Das eingeſchriebene 8flach.

1. Stelle die Folge aus dem 4flach in das 8flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 4flachs und des eingeſchriebenen 8flachs treffen zuſammen?

3. Wie verwandelt man das eingeſchriebene 8flach in das umſchriebene 4flach durch Hinzufügen?

4. Wie verhalten ſich Axen, Kanten, Höhenlinien, Flächenaxen des eingeſchriebenen 8flachs zu den entſprechenden Linien des umſchriebenen 4flachs? Wie verhalten ſich die △e beider Körper?

B. Das umſchriebene 8flach.

1. Stelle die Folge aus dem 8flach ins 4flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen und eingeſchriebenen Körpers treffen zuſammen?

3. Wie verhalten ſich die Kanten des eingeſchriebenen 4flachs zu denen des umſchriebenen 8flachs?

C. 1. Verzeichne den Hauptdurchſchnitt eines 4flachs.

In dieſen Durchſchnitt verzeichne den des eingeſchriebenen 8flachs.

In den Durchſchnitt des 8flachs verzeichne einen 2ten 4flachsdurchſchnitt ſo, daß deſſen Ecken in die Höhenlinien des erſten 4flachdurchſchnitts fallen.

In den 2ten 4flachsdurchſchnitt verzeichne einen 2ten 8flachsdurchſchnitt.

Bemerke alle Winkelgrößen, und die verhältnißmäßigen Größen aller Linientheile.

2. Ein 4flach iſt um, eins in daſſelbe 8flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander? Welche zuſammentreffende Punkte haben ſie? Wie verhalten ſich ihre Kanten, Axen, △ecks höhenlinien, Kantenaxen?

3. Ein 8flach iſt um, eins in daſſelbe 4flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander, ihre Axen, Kanten, Flächenaxen, △ecks höhenlinien? —

Zu §. 17.

4flach und Rauten 12flach.

A. Das umſchriebene 4flach.

1. Stelle die Folge aus dem 4flach in das 12flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 4flachs und des eingeſchriebenen 12flachs fallen zuſammen?

3. Wie verhält ſich die Kante des 4flachs zur langen Gere des eingeſchriebenen 12flachs?

4. Vergleiche den betrachteten Uebergang aus dem 4flach ins 12flach mit dem aus dem 8flach ins 12flach.

5. Unter welchem Winkel ſitzt die Zuſpitzungsfläche auf der Fläche des 4flachs?

6. Welchen Winkel macht die Zuſpitzungsfläche mit der ihr an der zugeſpitzten Ecke gegenüber liegenden 4flachkante?

7. Wie verhalten ſich 3 oder 6 Zuſpitzungskanten an 3 Grundecken zu einer ſenkrechten Axe des 4flachs?

8. Vergleiche die beſtimmte Zuſpitzung des 4flachs mit dem Uebergange des Würfels ins 12flach. Wiederhole die ſiebente Frage.

9. Wie verhalten ſich Zuſpitzungsflächen zu einer Kantenaxe hinſichtlich des #s.

10. Welche Winkel bildet die Zuſpitzungsfläche mit der 4flachaxe und mit der ihr gegenüber liegenden Zuſpitzungskante? Welchen Winkel die Zuſpitzungskante mit der 4flachsaxe?

B. Das eingeſchriebene 4flach.

1. Stelle die Folge aus dem 4flach ins 12flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte oder Linien beider Körper fallen zuſammen?

C. 1. Es iſt ein 4flach um, eins in daſſelbe Rauten12flach beſchrieben, wie verhalten ſie ſich zu einander? Wie ihre Kanten, Axen, Kantenaxen?

2. Es iſt ein Rauten12flach um, eins in daſſelbe beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander? Wie ihre Ecken, Kanten, Axen?

3. Verzeichne den Durchſchnitt eines 12flachs in den eines 4flachs und wiederum in den 12flachsdurchſchnitt den eines 2ten 4flachs.

Zu §. 18.

4flach und Leuzit.

A. Das umſchriebene 4flach.

1. Stelle die Folge aus dem 4flach in den Leuzit. Beſchreibe dieſelbe. Vergleiche ſie mit der Folge aus dem 8flach in den Leuzit.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 4flachs und des eingeſchriebenen Leuzits fallen zuſammen?

3. Welchen Winkel macht die hier zur Sprache kommende Zuſchärfungsfläche der 4flachkanten mit der Fläche des 4flachs?

4. Welchen Winkel macht die Zuſpitzungsfläche des 4flachs mit der Kante auf welchem ſie aufſitzt?

5. Welchen Winkel mit der gegenüber liegenden Fläche?

6. Wie vielſten Theil der gegenüber liegenden Höhenlinie ſchneidet ſie ab?

7. Vergleiche dieſe Zuſpitzungsfläche mit der, aus welcher das Rauten12flach entſpringt.

8. Wie verhält ſich die Kante des umſchriebenen 4flachs zur Linie, welche 2 Hauptleuzitecken verbindet?

B. Das eingeſchriebene 4flach.

1. Stelle die Folge aus dem Leuzit in das 4flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Leuzits und des eingeſchriebenen 4flachs fallen zuſammen?

3. Wie verhält ſich die 4flachskante zur Linie, welche 2 Hauptecken des ihm umſchriebenen Leuzits verbindet?

C. 1. Verzeichne den Hauptdurchſchnitt eines 4flachs, in dieſen den eines Leuzits, in dieſen den eines 2ten Leuzits. Ziehe die 2 Axen des 4flachs, auch die Kantenaxe. Gieb die Größen der Linientheile und der Winkel an.

2. Es ſey ein 4flach um, eins in denſelben Leuzit beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

3. Es ſey ein Leuzit um, einer in daſſelbe 4flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Zu §. 19.

Verhältniß der um und in daſſelbe 4flach beſchriebenen Hauptkörper unter einander.

1. Verzeichne einen Hauptdurchſchnitt des 4flachs, und in dieſen die Durchſchnitte des eingeſchriebenen Würfel, 8flachs, Rauten12flachs und Leuzits. Verzeichne in dieſe einen gemeinſchaftlichen Hauptdurchſchnitt eines 4flachs.

2. Wie verhält ſich die Kante des umſchriebenen 4flachs zur Gere des Würfels, zur Kantenaxe oder Kante

des 8flachs, zu der Linie, welche 2 3kantige Ecken des Rauten12flachs und des Leuzits rechtwinklig durch eine Hauptaxe verbindet?

3. Wie die Kante des eingeſchriebenen 4flachs zu denſelben Linien?

4. Wie verhalten ſich hiernach die umſchriebenen Körper unter einander? Wie die eingeſchriebenen?

Zu §. 20.

1. Das Geſetz des Ebenmaaßes lautet: wenn man Eine Fläche oder Kante, oder Ecke eines Körpers auf beſtimmte Weiſe verändert (abſtumpft, zuſchärft, zuſpitzt) ſo müſſen alle gleichartigen Flächen, Kanten und Ecken deſſelben Körpers auf gleiche Weiſe verändert werden.

In wiefern widerſprechen die Uebergänge vom Vierflach in den Würfel, das 8flach, Rauten12flach und den Leuzit, dieſem Geſetze — in wiefern nicht?

Zu §. 19.

A. Das Pyramiden4flach.

1. Beſchreibe daſſelbe. Wie entſteht es durch Wegnahme, wie durch Hinzufügen?

2. Bei welcher Gelegenheit ward es betrachtet?

3. Gieb die Eigenſchaften des möglichſt ſtumpfen und des möglichſt ſpitzen Pyramiden4flachs an.

Zu §. 22.

B. Das Rauten12flach mit zugeſchärften 4kantigen Ecken.

1. Betrachte es. Welcher Körper würde entſtehn, wenn die Zuſchärfungsflächen ſo vergrößert würden, daß die Flächen des 12flachs ſchwänden?

2. Wie würdeſt du die 12 Schnitte auf dem Rauten-12flach genau verzeichnen?

3. Vergleiche den Körper mit dem Würfel und Leuzit.

Zu §. 23.

Das Rauten12flach, deſſen 4kantige Ecken mit 4 Flächen zugeſpitzt ſind, die Zuſpitzungsflächen auf die Seitenkanten aufgeſetzt.

1. Betrachte es. Welchen Körper würden die Zuſpitzungsflächen für ſich bilden?

2. Vergleiche dies Rauten12flach mit dem im vorigen §. betrachteten.

Zu §. 24.

Reihe Leuzitähnelnder Körper.

1. Gieb die Eigenſchaften eines Leuzitähnelnden Körpers an, deſſen 6 Hauptecken möglichſt ſtumpf, eines zweiten deſſen 6 Hauptecken möglichſt ſpitz. Wie würden beide Körper aus dem Würfel, 8flach und Rauten-12flach erzeugt werden?

Zu §. 25.

Der Pyramidenwürfel.

A. Der eingeſchriebene.

1. Stelle die Folge aus dem Würfel in den Pyramidenwürfel. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Würfels und des eingeſchriebenen Pyramidenwürfels fallen zuſammen?

B. Der umſchriebene.

1. Stelle die Folge aus dem Pyramidenwürfel in den Würfel. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Pyramidenwürfels und des eingeſchriebenen Würfels fallen zuſammen?

3. Wie groß darf der möglichſt ſtumpfe und der möglichſt ſcharfe Zuſchärfungskantenwinkel der Würfelkante, nicht ſeyn?

4. Bilde den umſchriebenen Pyramidenwürfel aus dem eingeſchriebenen Würfel durch Zuſetzen.

Beſtimme die Grundkantenwinkel, Flächenwinkel der möglichſt ſpitzen und möglichſt ſtumpfen aufgeſetzten Pyramide.

5. Wie geht der Pyramidenwürfel aus dem Leuzit, Rauten12flach und 8flach hervor?

Zu §. 26.

Das Pyramiden8flach.

A. Das eingeſchriebene.

1. Stelle die Folge aus dem 8flach in das Pyramiden8flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des Pyramiden8flachs und des ihm umſchriebenen 8flachs fallen zuſammen?

B. Das umſchriebene.

1. Stelle die Folge aus dem Pyramiden8flach in das 8flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Pyramiden8flachs und des ihm eingeſchriebenen 8flachs fallen zuſammen?

3. Wie groß können der möglichſt große und der möglichſt kleine Winkel der Zuſchärfungskanten des 8flachs ſeyn?

4. Bilde aus dem 8flach das Pyramiden8flach durch Hinzufügen. Wie groß können die Winkel der Kanten und Flächen der möglichſt ſtumpfen und der möglichſt ſpitzen hinzugefügten Pyramide ſeyn? —

5. Bilde das Pyramiden8flach aus dem Würfel, Rauten12flach und Leuzit.

Zu §. 27.

Das Pyramidenrauten12flach oder 48flach.

A. Das eingeſchriebene.

1. Stelle die Folge aus dem Rauten12flach in das 48flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 12flachs und des eingeſchriebenen 48flachs treffen zuſammen?

B. Das umſchriebene.

1. Stelle die Folge aus dem 48flach in das 12flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des um- und des eingeſchriebenen Körpers treffen zuſammen?

3. Bilde das möglichſt ſtumpfe und das möglichſt ſpitze 48flach aus dem Rauten12flach durch Hinzufügen. Wie groß können die Kanten- und Flächenwinkel beider ſeyn?

4. Wie verhält ſich das 48flach zu Würfel, 8flach, Leuzit — den umſchriebenen und den eingeſchriebenen?

Die Nebenſippe des Kies12flachs.

Zu §. 28.

1) Würfel und Kies12flach.

A. Das eingeſchriebene 12flach.

1. Stelle die Folge aus dem Würfel in das Kies12flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Gieb Flächen, Kanten, Ecken des Kies12flachs an. Hauptkante, Hauptlinie, Queergere.

3. In wiefern weicht die gegenwärtige Abſtumpfung der Würfelkanten von derjenigen ab, aus welcher das Rauten12flach entſteht?

4. Eine Reihe dem regelmäßigen 12flach ähnelnder Körper, einer davon das Kies12flach. Am einen Ende ſteht der Würfel, am andern das Rauten12flach.

5. Wie verhält ſich die Hauptkante des Kies12flachs zur Hauptaxe?

B. Das umſchriebene Kies12flach.

1. Stelle die Folge aus dem Kies12flach in den Würfel. Welche Punkte und Linien beider Körper fallen zuſammen?

C. 1. Es ſey ein Würfel um, einer in daſſelbe Kies12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

2. Es ſey ein Kies12flach um, eines in denſelben Würfel beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

3. Wie verhält ſich die Queergere zur Hauptkante und Hauptaxe des Kies12flachs.

4. In welche Theile wird die Hauptlinie durch die Queergere zerlegt?

5. Kiesraute und ihre Eigenheit.

Zu §. 29.

8flach und Kies12flach.

A. Das eingeſchriebene 8flach.

1. Stelle den Uebergang aus dem 12flach in das 20flach. Beſchreibe denſelben.

2. Beſchreibe das 20flach. Welche Linien des 20flachs ſtimmen ganz mit Linien des 12flachs überein, aus welchem es hervorgegangen?

3. Stelle den Uebergang aus dem 20flach in das 8flach. Beſchreibe denſelben.

4. Wie verhält ſich das eingeſchriebene 8flach zu dem ihm umſchriebenen Kies12flach? Welche Punkte beider Körper treffen zuſammen?

5. Wie verhält ſich beſagtes 8flach zu dem Würfel, welcher dem Kies12flach umſchrieben iſt, in welches das 8flach ſelbſt eingeſchrieben?

B. Das umſchriebene 8flach.

1. Stelle den Uebergang aus dem 8flach ins 20flach. Beſchreibe denſelben. Beſtimme die Regel der Zuſchärfung der 8flachsecken.

2. Wie vielſter Theil der 8flachaxe iſt die Hauptkante und die Hauptkantenaxe des 20flachs?

3. Stelle den Uebergang aus dem 20flach ins Kies12flach.

4. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 8flachs und des eingeſchriebenen 12flachs fallen zuſam-

men? Wie verhalten ſich die Queergeren des 12flachs zur Axe des 8flachs? Wie die Hauptkante und Hauptaxe?

5. Wie verhält ſich das umſchriebene 8flach zu dem Würfel, welcher dem Kies12flach eingeſchrieben iſt?

6. Wie verhalten ſich Hauptkante und Hauptkantenaxe des 20flachs zu den gleichen Linien des Kies12flachs dieſer Folge.

C. Wie verhält ſich ein 8flach das um, zu einem 8flach das in daſſelbe Kies12flach beſchrieben worden?

Wie verhält ſich ein Kies12flach das um, zu einem Kies12flach das in daſſelbe 8flach beſchrieben worden?

Zu §. 30.

Das Rauten12flach und das Kies12flach.

A. Das eingeſchriebene Rauten12flach.

1. Stelle die Folge aus dem Kies12flach in das Rauten12flach. Beſchreibe dieſelbe. Welche Punkte uud Linien des um- und des eingeſchriebenen Körpers fallen zuſammen?

2. Wie verhält ſich die kurze Gere des Rauten12flachs zu gewiſſen Linien des umſchriebenen Kies12flachs?

B. Das umſchriebene Rauten12flach.

1. Stelle die Folge aus dem Rauten12flach in das Kies12flach.

2. Vergleiche dieſelbe mit der Folge aus dem 8flach ins Kies12flach.

Zu §. 31.
Leuzit und Kies12flach.

A. Das eingeſchriebene Kies12flach.

1. Stelle die Folge aus dem Leuzit in das Kies12flach. Beſchreibe dieſelbe. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen Leuzits und des eingeſchriebenen 12flachs treffen zuſammen? — Wie verhält ſich die Hauptaxe des Kies12flachs zu der des den Leuzit?

2. Beweiſe daß 2 einander gegenüber liegende längere Leuzitkanten an der Hauptleuzitecke einen Winkel bilden, welcher dem Winkel der Hauptkante des Kies12flachs gleich iſt.

3. Wie verzeichneſt du den Durchſchnitt durch 8 in einer Ebene liegende längere Leuzitkanten?

B. Das umſchriebene Kies12flach.

1. Stelle die Folge aus dem Kies12flach in den Leuzit. Beſchreibe dieſelbe. Welche Punkte und Linien des eingeſchriebenen Leuzits und des umſchriebenen 12flachs treffen zuſammen?

C. 1. Es ſey ein Leuzit um, einer in daſſelbe Kies12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

2. Es ſey ein Kies12flach um, eines in denſelben Leuzit beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Zu §. 32.
4flach und Kies12flach.

A. Das eingeſchriebene Kies12flach.

1. Stelle die Folge aus dem 4flach in das 12flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 4flachs und des eingeſchriebenen 12flachs treffen zuſammen?

3. Der Linie zwiſchen 2 △ecksmitten des umſchriebenen 4flachs entſpricht beim 12flach? . . .

B. Das umſchriebene Kies12flach.

1. Stelle die Folge aus dem 12flach in das 4flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Welche Punkte und Linien des umſchriebenen 12flachs und des eingeſchriebenen 4flachs treffen zuſammen?

3. Der 4flachskante entſpricht beim umſchriebenen 12flach? . . .

C. 1. Es iſt ein Kies12flach um, eins in daſſelbe 4flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

2. Es iſt ein 4flach um, eins in daſſelbe 12flach beſchrieben, wie verhalten ſich beide zu einander?

Zu §. 33.

Das Kies24flach.

1. Stelle die Folge aus dem Kies12flach in das Kies24flach. Beſchreibe dieſelbe.

2. Beſchreibe das Kies24flach. Mit welchem Körper hat es Aehnlichkeit?

3. Stelle die Folge aus dem Kies24flach durch das Kies30flach in den Würfel. Beſchreibe dieſelbe.

4. Wie verhält ſich das Kies24flach zum 8flach?

5. Stelle die Folge aus einem Würfel in das ihm eingeſchriebene Kies12flach. An dieſe ſchließe an:

a) eine Folge aus gedachtem 12flach in den ihm eingeſchriebenen Würfel.

b. eine Folge aus gedachtem 12flach in das ihm eingeſchriebene 8flach, weiter in den dieſem 8flach wiederum eingeſchriebenen Würfel.

c. eine Folge aus gedachtem 12flach in das ihm eingeſchriebene Kies24flach, weiter in den dieſem eingeſchriebenen Würfel.

Wie verhalten ſich die 4 aufgeführten Würfel zu einander?

Zu §. 34.

Das Geſchlecht des regelmäßigen 12flachs in ſeiner Aehnlichkeit mit dem Würfelgeſchlecht.

1. Stelle die Folge aus dem 12flach in das 20flach. Beſchreibe dieſelbe, inſonderheit das 12flach und 20flach.

2. An welche Folge erinnert ſie?

3. Stelle die Folge aus dem 12flach und 20flach in das Rauten30flach. Beſchreibe dieſelbe, inſonderheit das 30flach.

4. An welche Folgen werden wir erinnert?

5. Stelle die Folge aus dem 30flach in das 60flach. Beſchreibe dieſelbe. Woran erinnert ſie?

6. Stelle die Folgen aus dem 12flach und 20flach in das 60flach. Beſchreibe dieſelben. Woran erinnern ſie?

7. Wie verhalten ſich die Zuſpitzungsflächen der Ecken des 12- und 20flachs zu gewiſſen Axen dieſer Körper?

8. Wie erzeugt man aus dem 60flach das 30flach, 20flach und 12flach?

9. Vergleiche das 60flach hinſichtlich auf Flächen, Kanten, Ecken, genau mit dem ihm ähnelnden Körper des Würfelgeſchlechts.

10. Entſpricht im Geſchlecht des regelmäßigen 12flachs ein Körper dem 48flach?

11. Kann es in dieſem Geſchlecht einen Körper geben der ſich zu ihm verhielte, wie das 4flach zum Würfelgeſchlecht?

12. Kannſt du noch Verſchiedenheiten zwiſchen der Verwandtſchaftsreihe des 12flach- und des Würfelgeſchlechts auffinden?

Das Geſchlecht des Rautenflachs.

Zu §. 36.

Der Würfel.

1. Gieb genau Flächen, Kanten, Ecken, Geren, Axen des Würfels an, ihre Zahl und Art.

2. Wie verhalten ſich Kante, Gere und Axe des Würfels zu einander?

Zu §. 37.

1. Man gebe dem Schüler etwa die Modelle der 2 ſtumpfen und 2 ſpitzen wichtigſten Rautenflache des Kalkſpaths (Hauy. Fig. 1. 2. 3. 5.) Er lege ſie alle in eine ähnliche Lage.

2. Hat der Schüler dies gethan, ſo frage man, welcher Körper zwiſchen den ſtumpfen und ſpitzen Rautenflachen in der Mitte ſtehe?

4. Man laſſe den Würfel an den gehörigen Platz mit allen Rautenflachen in eine ähnliche Lage ſtellen.

4. Was

4. Was haben alle Rautenflache mit dem Würfel gemein?

5. Worin weichen alle gleichmäßig vom Würfel ab?

6. Man zeige das S. 3. beſchriebene Würfelkantengeripp, und an ihm die Entſtehung 2er entgegengeſetzter Reihen ſtumpfer und ſpitzer Rautenflache.

Zu §. 38.

Verhältniß der ſpitzen Rautenflache zu den ſtumpfen.

1. Hinſichtlich der Axe.

2. Hinſichtlich der Polecken, Polkanten, Polwinkel.

3. Hinſichtlich der Randecken, Randkanten, Randgeren und Polgeren.

4. Hinſichtlich der Winkel, welche eine Polkante mit 2 einander #en ihr angränzenden Polgeren bildet.

Zu §. 39.

Die Enden der Reihe ſpitzer Rautenflache.

1. Gieb die möglich ſpitzeſten und möglich ſtumpfſten Flächen- } Kanten- } Winkel an, d. i. wie ſie bei dem möglich ſpitzeſten und dem wenigſt ſpitzen Rautenflache ſeyn können.

2. Wie verhalten ſich Pol- und Randgeren in dieſer Reihe?

3. Wie die Geren zu den Kanten?

4. Wie vielſter Theil der Axe darf die Polgere des ſpitzeſten Rautenflachs nicht ſeyn?

5. Bei welchem ſpitzen Rautenflach iſt die Randgere der Kante gleich?

Zu §. 40.

Die Enden ſtumpfer Rautenflache.

1. Gieb die möglich ſpitzeſten und möglich ſtumpfſten
Flächen=) Winkel an.
Kanten=)

2. Kante. Gere. Axe. Welche Linien wachſen, welche nehmen ab nach Maasgabe des ſtumpfer Werdens der ſtumpfen Rautenflache?

3. Wie verhält ſich die Polgere zur Kante des ſtumpfen Rautenflachs, kann ſie ihr gleich ſeyn?

4. Wie verhält ſich die Polgere zur Randgere?

5. Wie die Hauptaxe zur Randgere?

6. Wie die Randgere zur Axe?

7. Wie die Polgere zur Axe?

8. Wie die Kante zur Axe?

9. Was könnte als das unmögliche Aeußerſte der ſtumpfen Rautenflachreihe betrachtet werden?

Zu §. 40b.

Nähere Vergleichung der 2 entgegengeſetzten Reihen von Rautenflachen.

1. Vergleiche die Aeußerſten der Flächen und Kantenwinkel der Reihe ſpitzer und ſtumpfer Rautenflache.

Zu §. 41.

Winkeltauſch.

1. Schreibe die Aeußerſten der Kanten oder Flächenwinkel der 2 Reihen unter einander, die Würfelwinkel zwiſchen beiden inne.

2. Wie viel Grade haben die Flächen und Kantenwinkel vom möglichſt ſtumpfen zum wenigſt ſtumpfen

Rautenflache in der Reihe ſtumpfer Rautenflache zu durchlaufen? Wie viel Grade in der Reihe ſpitzer Rautenflache, vom möglichſt ſpitzen zum wenigſt ſpitzen?

3. Welche Winkel wachſen in den beiden Reihen raſcher?

4. Iſt der Polkanten- oder der Pol-Flächenwinkel irgend eines Rautenflachs größer?

5. Iſt der Unterſchied zwiſchen Kanten- und Flächenwinkeln größer oder kleiner bei den Rautenflachen, welche dem Würfel näher oder bei denen, welche ihm entfernter ſtehn?

Vergleiche die 4 Hauyſchen Hauptrautenflache des Kalkſpaths.

6. Vergleiche nochmals das Verhältniß des Anwachſens der Flächen- und Kantenwinkel beider Reihen. Zeigt ſich eine Gleichheit eines beſtimmten raſchern Fortſchritts in beiden Reihen?

7. Es ſeyen die Kanten oder Flächenwinkel eines ſtumpfen Rautenflachs bekannt, es ſeyen zweitens die Flächenwinkel eines ſpitzen Rautenflachs übereinſtimmend mit den Kantenwinkeln jenes ſtumpfen Rautenflachs gegeben. Laſſen ſich hiernach die Kantenwinkel des ſpitzen Rautenflachs beſtimmen?

Zu §. 42.

1. Bildet die Polgere oder die Polkante eines Rautenflachs einen größeren Winkel mit der Axe?

Zu §. 43.

1. Verzeichne den Hauptdurchſchnitt eines Rautenflachs — durch 2 #e Polgeren und 2 #e Polkanten die ſämmtlich in Einer Ebene liegen.

2. Ziehe in gedachten Durchſchnitt die 2 Höhenlinien des obern und untern Rand△s.

3. 3theile die Axe.

4. Hälfte die Axe durch mehrere Linien.

5. Aus der Mitte der obern Polgere (des Durchſchnitts) ziehe eine Linie # der Axe auf die untere Polkante. Dieſe Linie und die Axe theilen die Linie, welche aus der untern Randecke nach der Mitte der ihr gegenüber liegenden untern Polgere läuft, in welche Theile? In welche Theile zerlegt dieſelbe Linie die untere Polkante, auf welche ſie fällt? Wie verhält ſich dieſe Linie zur Hauptaxe?

6. Wenn die Polgere mit der Axe einen Winkel von 45° macht, welche Winkel ſind dann auch von 45°. welche Linie iſt dann der Axe gleich?

7. Eine Linie von einer untern Randecke nach der Mitte der ihr gegenüber liegenden obern Polkante — eine zweite von der obern Randecke nach der Mitte der ihr gegenüber liegenden untern Polkante theilen die Axe und werden von ihr getheilt, in welche Theile?

8. Ziehe eine Linie von einem Punkte der untern Polgere, der um $\frac{1}{4}$ dieſer Polgere von der Randecke entfernt liegt, an welche ſie gränzt, nach der obern Polecke. Wie verhält ſich dieſe Linie zur Polgere? —

Zu §. 44.

Abſtumpfung und 3flächige Zuſpitzuug eines Rautenflachs.

1. Gieb die Reihe von Abſtumpfungen und 3flächigen Zuſpitzungen nach Anleitung eines Modells möglichſt vollſtändig an.

Zu §. 45.

Körper welche aus den angegebenen Abſtumpfungen entſpringen.

1. Welche Körper entſtehn aus Abſtumpfung 2er Polecken, nach Maaßgabe der Stärke der Abſtumpfung?

2. Welcher Körper entſteht insbeſondere, wenn die Abſtumpfung durch 2 Randdreiecke geht?

3. Läßt ſich aus einem Rautenflach ein regelmäßiges 8flach bilden?

* * *

4. Welcher Körper entſteht aus Verbindung der Abſtumpfung der Polecken und der Randecken wenn letztere ſo iſt, daß ſich die Abſtumpfungsfläche weder nach der obern noch nach der untern Polecke neigt?

5. Wie verhalten ſich die Theile der Polkanten und Polgeren, welche letztere Abſtumpfung abſchneidet?

Zuſatz.

6. Wie groß iſt die Summe der 2 äußeren an der Hypotenuſe liegenden Winkel eines rechtwinkligen △s?

7. Es iſt eine Säule mit rechtwinklig angeſetzten Endflächen gegeben. Wie viel Hauptarten von Abſtumpfung ihrer Endkanten giebt es?

8. Der Winkel, den eine Zuſpitzungsfläche mit der Axe der Säule macht, mehr dem, welchen ſie mit der

Seitenfläche (oder Seitenkante) bildet auf welcher ſie aufſitzt beträgt? Anzuwenden auf den Winkel, den die Zuſpitzungskante mit der Seitenkante und mit der Axe der Säule bildet.

9. Das primitive Rautenflach des Kalkſpaths neigt ſich gleich gegen die Endfläche und Seitenfläche einer Säule. Wie neigt es ſich gegen ſeine Axe?

10. Wie verhalten ſich in dieſer Hinſicht Rautenflache die ſtumpfer oder ſpitzer ſind als das primitive?

11. Bildet die Polkante oder die Polgere deſſelben Rautenflachs ſtumpfere Winkel mit der Endfläche der Säule?

12. 3 Winkel. 1) der, welchen die Fläche eines Rautenflachs mit der Säulenſeitenfläche (oder Seitenkante) 2) mit der Säulenendfläche — 3) mit ſeiner Axe bildet. Einer dieſer 3 Winkel ſey gegeben, finde die 2 andern.

13. 3flächige Zuſpitzung der Polecken, die Zuſpitzungsflächen auf die Polkanten aufgeſetzt.

* * *

14. Regelmäßige Abſtumpfung der Polkanten. Stelle die Folge aus einem Rautenflach mit abgeſtumpften Polkanten in das Rautenflach welches hieraus hervorgeht. Iſt dies ſtumpfer oder ſpitzer als das erſte?

15. Verzeichne die Abſtumpfungsfläche auf die Flächen des abzuſtumpfenden Rautenflachs.

16. Wie verhält ſich

a. Die Randgere des abgeſtumpften zu der Randgere des 2ten (aus der Abſtumpfung entſpringenden) Rautenflachs?

b. Die Polkante des erſtern zur Polgere des 2ten?

c. Die Axe des erſtern zur Axe des 2ten?

d. Die Höhe eines Randdreiecks des erſten und 2ten.

17. Betrachte

das contraſtirende winkelvertauſchende primitive gleichaxige	Rautenflach des Kalkſpaths

mit Hinſicht auf 14. 15. 16. und zwar ſo, daß du durch die (eben betrachtete) Abſtumpfung der Polkanten von dem ſpitzeſten Rautenflach zum ſtumpfſten fortſchreiteſt. Verzeichne ihre Hauptdurchſchnitte in einander.

* * *

18. Von einer untern Randgere ſchneide durch 2 obere angränzende Polgeren nach der obern Polecke. Führe 5 ähnliche Schnitte. Das ſo erzeugte 2te Rautenflach iſt es ſpitzer als das erſte veränderte?

19. Wie verhalten ſich die Polkanten des 2ten Rautenflachs zu den Polgeren des erſten? Eben ſo die Randkanten?

20. Wie verhalten ſich die Randgeren) beider Rautenflache?
— — — die Rand△e)

21. Wie verhält ſich die Randaxe des 2ten zur Flächenaxe des erſten?

22. Betrachte die bei Nro. 17 genannten 4 Kalkrautenflache. Gieb genau ihre gegenſeitigen Verhältniſſe an, welche hervorgehn, wenn du aus dem ſtumpfſten durch die eben betrachtete Abſtumpfung zum ſpitzeſten fortſchreiteſt. Axen. Kanten. Randaxen. Randgeren. Randdreiecke. Verzeichne die Hauptdurchſchnitte jener 4 Rautenflache in einander.

23. Hälfte die Randkanten, verbinde die Hälftpunkte durch Linien, von welchen aus 3 obere und 3 untere Polkanten durch 3 Schnitte nach den obern, 3 Schnitte nach der untern Polecke abgeſtumpft werden. Welcher Körper entſteht hierdurch?

24. Wie groß darf der Polwinkel der 6ſeitigen Pyramide nicht ſeyn?

25. Vergleiche den Winkel welchen die Fläche, mit dem welchen die Polkante der 6ſeitigen Doppelpyramide mit der Axe bildet.

26. Iſt die Grundfläche der 6ſeitigen Doppelpyramide ein regelmäßiges 6eck?

27. Sind alle Polkantenwinkel gleich?

28. Wenn du # den (unter 20. 24) aufgeführten Abſtumpfungsflächen weiter ſchneideſt bis die urſprünglichen Flächen des Rautenflachs ſchwinden, welcher Körper entſteht?

29. Abſtumpfung der obern Randecke mit Neigung nach der untern Polecke, der untern Randecke mit Neigung nach der obern Polecke. Welcher Art ſind die hieraus erzeugten Rautenflache? Wie verhalten ſich ihre Flächen zu den Säulenflächen die durch regelmäßige Abſtumpfung der Randecken gebildet werden?

30. Zuſpitzung der Polecken, die Zuſpitzungsflächen auf die Seitenflächen aufgeſetzt.

31. Durch ſolche Zuſpitzung bilde ein Rautenflach dem ähnlich, das durch Abſtumpfung der Polkanten entſteht.

32. Wie erzeugſt du das gleichaxige Rautenflach aus dem winkelvertauſchenden?

Halle, gedruckt bei Schimmelpfennigs Erben.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Raumer, Karl <<von>>,

Versuch eines ABC-Buchs der Krystallkunde

Bd.: [1]

Berlin (1820)

Lith. 336 g-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10284421-4